N° d'enregistrement
au C.N.R.S.
A.O. 7166

Articles principaux
recouvrant en partie la

THESE

DE DOCTORAT ES SCIENCES PHYSIQUES

présentée à
L'UNIVERSITE PARIS VI
par

M. Gérard ROBLIN

pour obtenir
LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES

Sujet: CONTRIBUTION A LA METROLOGIE OPTIQUE PAR MODULATION TEMPORELLE DES SIGNAUX OPTIQUES

soutenue le 12 JUIN 1972 devant la commission d'examen

MM. M. FRANÇON — Président
A. MARECHAL
P. GIACOMO
J.CH. VIENOT
G. NOMARSKI
— Examinateurs

N° d'enregistrement
au C.N.R.S.
A.O. 7166

Articles principaux
recouvrant en partie la

THESE

DE DOCTORAT ES SCIENCES PHYSIQUES

présentée à
L'UNIVERSITE PARIS VI
par

M. Gérard ROBLIN

pour obtenir
LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES

Sujet: CONTRIBUTION A LA METROLOGIE OPTIQUE PAR MODULATION TEMPORELLE DES SIGNAUX OPTIQUES

soutenue le 12 JUIN 1972 devant la commission d'examen

MM. M. FRANÇON — Président
A. MARECHAL
P. GIACOMO
J.CH. VIENOT
G. NOMARSKI
— Examinateurs

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

SUR LA LOCALISATION LATERALE D'UN OBJET PERIODIQUE EN ECLAIRAGE PARTIELLEMENT COHERENT

G. ROBLIN
Institut d'Optique, Laboratoire de Microscopie, Paris 15, France

Reçu le 24 Septembre 1971

The lateral optical localization is studied in the case of a partially coherent periodic object. The variations of the "localizing power" in terms of the effective source sizes are given. The comparison between three periodic objects is discussed in terms of their spatial frequency spectra.

1. INTRODUCTION

Le problème de la localisation latérale d'une frange d'interférences à deux ondes à l'aide d'une fente parallèle aux franges animée d'un mouvement alternatif de balayage [1] peut être étendu au cas d'un objet périodique quelconque, pourvu que sa répartition en intensité présente un axe de symétrie à l'intérieur d'une période. Cette particularité de symétrie existe également pour le signal optique $S(x)$, ou flux lumineux transmis par la fente en fonction de son abscisse. On peut montrer qu'un écart à la localisation Δx entraîne une variation de signal de profondeur de modulation maximale:

$$\Delta S = 2S'(X_0)\,\Delta x\,,$$

$S'(X_0)$ étant la dérivée du signal au point ayant pour abscisse l'amplitude de vibration X_0 de la fente. Dans ces conditions, pour un rapport signal sur bruit R, le pouvoir de localisation, défini comme l'inverse du plus petit écart à la localisation décelable δx [2] est:

$$1/\delta x = 2RS'(X_0)/S(X_0)\,.$$

Cette grandeur dépend donc de l'allure du signal optique et par conséquent de la nature de l'éclairage de l'objet examiné à l'aide d'un instrument d'optique, la localisation s'effectuant le plus généralement dans le plan de l'image. Le cas des éclairages incohérent et cohérent pour lesquels l'instrument d'optique opère un filtrage des fréquences spatiales respectivement en intensité et en amplitude a été précédemment examiné [2] tant pour les objets périodiques que pour le bord de plage. Nous étudierons dans ce qui suit le cas d'un objet dont l'image fournie par un système doté d'un éclairage partiellement cohérent possède une répartition périodique en intensité, la localisation s'effectuant en fait dans le plan de cette image.

2. CALCUL DU SIGNAL OPTIQUE

En éclairage partiellement cohérent, la répartition des éclairements dans l'image est donnée [3] par:

$$I(x',y') = \iiiint \Omega(x_1,y_1)\,E(x'-x_1,y'-y_1) \times \Omega^*(x_2,y_2)\,E^*(x'-x_2,y'-y_2) \times \gamma(x_2-x_1,y_2-y_1)\,dx_1\,dx_2\,dy_1\,dy_2\,,$$

$\Omega(x,y)$ étant le facteur de transmission en amplitude dans l'objet; $E(x'-x,y'-y)$ la répartition des amplitudes produite par un point source situé au point de coordonnées x,y, le grandissement transversal de l'instrument étant supposé égal à l'unité; $\gamma(x_2-x_1,y_2-y_1)$ le degré de cohérence partielle entre deux points x_1,y_1 et x_2,y_2 du plan objet.

A partir de cette expression on montre d'autre part [4] que si l'objet est périodique dans une seule direction, celle des x par exemple, c'est-à-dire que si le facteur de transmission en amplitude de l'objet peut se mettre sous la forme

$$\Omega(x) = \sum_m a(m)\,e^{imx}\,,$$

l'éclairement dans l'image s'écrit:

$$I(x') = \sum_m \sum_p C(m,p)\,a(m)\,a^*(p)\,e^{i(m-p)x'}\,,$$

avec

$$C(m,p) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int \gamma(u,v) f(u+m,v) f^*(u+p,v)\,du\,dv\,,$$

$\gamma(u,v)$ étant la répartition en intensité de la source, $f(u,v)$ le facteur de transmission en amplitude de la pupille de l'instrument, u et v ayant la dimension de fréquence spatiale.

Supposons que l'on choisisse un objet dont le facteur de transmission en amplitude soit périodique de fréquence spatiale ω, tel que:

$$\Omega(x) = \tfrac{1}{2}(1 + e^{i\omega x}).$$

Cette répartition est la somme en amplitude de deux ondes polarisées perpendiculairement et déphasées d'une quantité ωx. Ceci est obtenu par exemple à l'aide d'un prisme de Wollaston précédé d'un polariseur orienté à 45° de ses axes. Après détection à l'aide d'un analyseur on obtient une répartition en intensité qui est celle des interférences à deux ondes. Donc:

$$\Omega(x) = \sum_m a(m)\, e^{imx}\,,$$

où m ne peut prendre que les deux seules valeurs 0 et ω. La répartition en éclairements dans l'image s'écrit:

$$I(x') = C(0,0)\,a(0)\,a^*(0) + C(0,\omega)\,a(0)\,a^*(\omega)\,e^{-i\omega x'}$$

$$+ C(\omega,0)\,a(\omega)\,a^*(0)\,e^{i\omega x'} + C(\omega,\omega)\,a(\omega)\,a^*(\omega)$$

$$= \tfrac{1}{4}\,[C(0,0) + C(0,\omega)\,e^{-i\omega x'}$$

$$+ C(\omega,0)\,e^{i\omega x'} + C(\omega,\omega)\,]\,.$$

Si nous utilisons un instrument d'optique de type microscope muni d'un objectif à pupille circulaire dénué d'aberration éclairé à l'aide d'un condenseur à pupille circulaire uniformément illuminée, les quantités $\gamma(u,v)$ et $f(u,v)$ sont égales à 1 pour les points intérieurs aux cercles de rayons respectivement égaux aux ouvertures numériques du condenseur pour γ, de l'objectif pour f, et nulles à l'extérieur. La fig. 1 nous montre immédiatement que $C(0,0) = 1$ (si nous normalisons en prenant la surface de la pupille du condenseur pour unité) et que

$$C(\omega,\omega) = C(0,\omega) = C(\omega,0) = C\,,$$

C étant l'aire commune hachurée aux deux cercles représentant respectivement la pupille du condenseur et la pupille de l'objectif translatée de la fréquence spatiale ω.

Dans ces conditions

$$I(x') = \tfrac{1}{4}\,[1 + C + 2C\cos\omega x']\,.$$

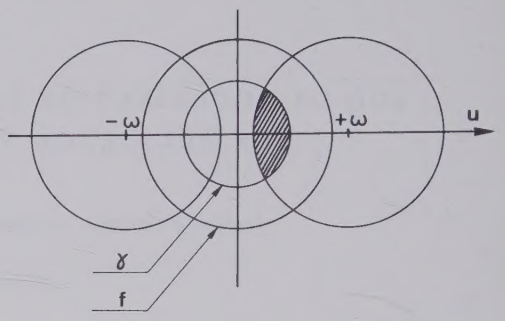

Fig. 1. Calcul des coefficients $C(m,p)$ dans le cas particulier de l'image d'un objet périodique à deux ondes. Les cercles γ et f représentent respectivement les pupilles du condenseur et de l'objectif, ω est la fréquence spatiale fondamentale de l'objet.

Si la fente qui balaie cette image est suffisamment fine, le contraste n'étant pratiquement pas affecté par une fente dont la largeur atteint le quart de la période [5], le signal optique sera de la même forme:

$$S(x') = \tfrac{1}{4}[1 + C + 2C\cos(2\pi x'/p)]\,,$$

p étant la période de l'objet.
Ce signal est une fonction sinusoïdale de l'abscisse de la fente.

3. POUVOIR DE LOCALISATION

Dans ces conditions, le pouvoir de localisation est égal à

$$1/\delta x = (4\pi R/p)\,\frac{2C\,\sin(2\pi X_0/p)}{1 + C + 2C\,\cos(2\pi X_0/p)}\,.$$

Si nous choisissons une amplitude de vibration X_0 égale au quart de la période, solution d'ailleurs optimale dans le cas des éclairages cohérent et incohérent [5] et offrant l'avantage de fournir une variation de signal ΔS variant linéairement avec l'écart à la localisation Δx, le pouvoir de localisation s'exprime par

$$1/\delta x = (4\pi R/p)\,\{2C/(1+C)\}\,.$$

Si nous exprimons p et δx en unités optiques $(\lambda/2)\sin U_0$ qui représente la limite de résolution de l'objectif d'ouverture numérique $\sin U_0$:

$$p = (r\lambda/2)\sin U_0\,, \qquad x = (\rho_p\,\lambda/2)\sin U_0$$

et si $s = \sin U_c/\sin U_0$ est le rapport des ouvertures numériques du condenseur et de l'objectif:

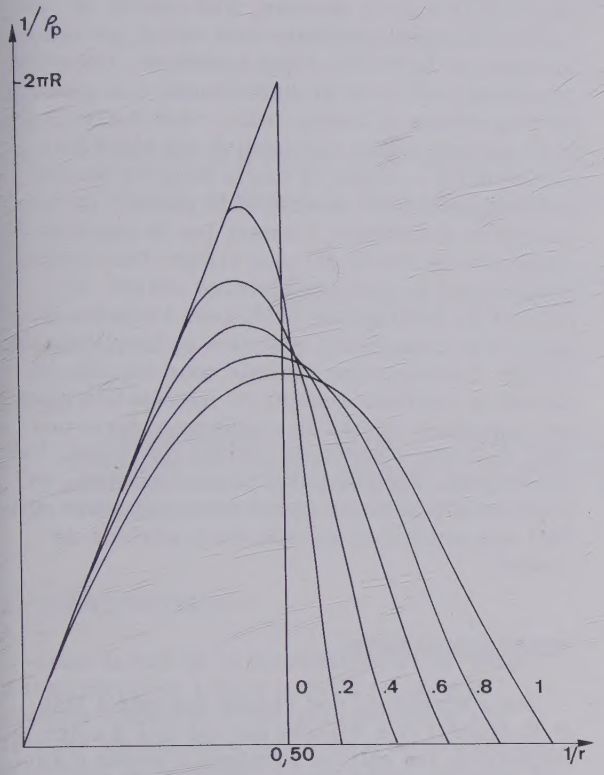

Fig. 2. Variations du pouvoir de localisation en fonction de la fréquence spatiale d'un objet d'amplitude $\Omega(x) = \frac{1}{2}(1 + e^{i\omega x})$ pour différentes ouvertures relatives s du condenseur.

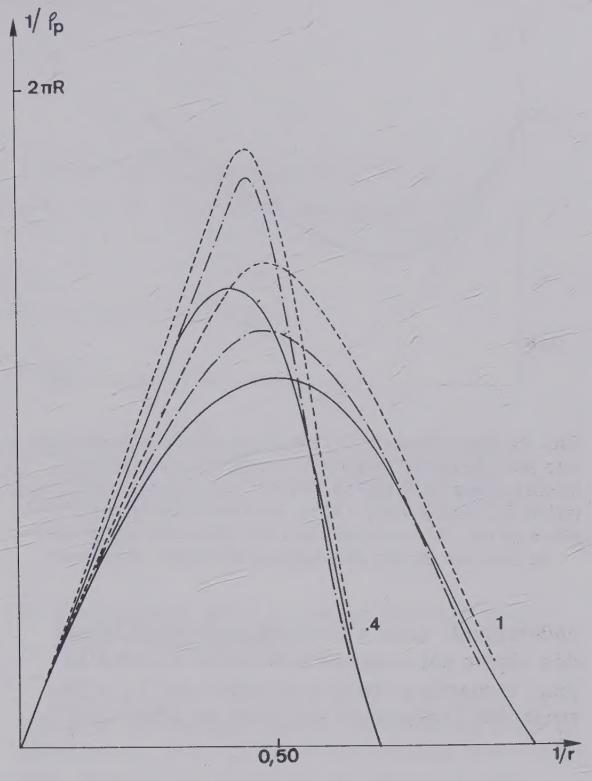

Fig. 3. Comparaison pour deux ouvertures relatives du condenseur, $s = 0{,}4$ et $s = 1$, des variations du pouvoir de localisation en fonction de la fréquence spatiale pour trois objets périodiques de la forme:

$\Omega_1(x) = \frac{1}{2}(1 + e^{i\omega x})$ en trait plein,

$\Omega_2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos \omega x)$ en trait mixte,

$\Omega_3(x) = Cr(\omega x)$ en trait tirets.

$$1/\rho_p = 4\pi R\{2C/(1+C)\}/r, \qquad r > 2/(1+s).$$

Rappelons les résultats obtenus dans les mêmes conditions expérimentales en éclairage cohérent et incohérent [2], M étant le facteur de contraste:

$$1/\rho_c = 4\pi R/r, \qquad r > 2;$$

$$1/\rho_I = 4\pi RM(1/r)/r, \qquad r > 1.$$

La fig. 2 représente les variations du pouvoir de localisation en fonction de la fréquence spatiale de l'objet pour différentes valeurs de l'ouverture relative du condenseur s. Toutes choses égales par ailleurs (notamment à niveau d'énergie constant dans le plan de la source) le pouvoir de localisation diminue avec l'ouverture du condenseur.

L'objet choisi est évidemment le plus difficile car c'est l'objet périodique présentant le spectre de fréquences spatiales le moins étendu. On peut s'attendre à une amélioration de la localisation des objets à spectre plus étendu. Nous avons vérifié ce phénomène en appliquant la méthode à des objets dont la répartition en amplitude est soit sinusoïdale (spectre à trois termes), soit en forme de créneau, dont les images ont été calculées par Mondal et Slansky [6]. Nous avons dans ce cas choisi des amplitudes de vibration X_0 telles que la variation de signal reste linéaire avec l'écart à la localisation de part et d'autre de cette valeur. La fig. 3 montre bien pour deux valeurs d'ouverture relative du condenseur $s = 0{,}4$ et $s = 1$ que le pouvoir de localisation augmente avec le nombre de termes du spectre de fréquences spatiales en amplitude.

La fig. 4 donne en fonction de l'ouverture relative du condenseur les valeurs des fréquences spatiales $1/r_0$ pour lesquelles on obtient le meilleur pouvoir de localisation. Outre les trois types d'objets de contraste unité considérés pré-

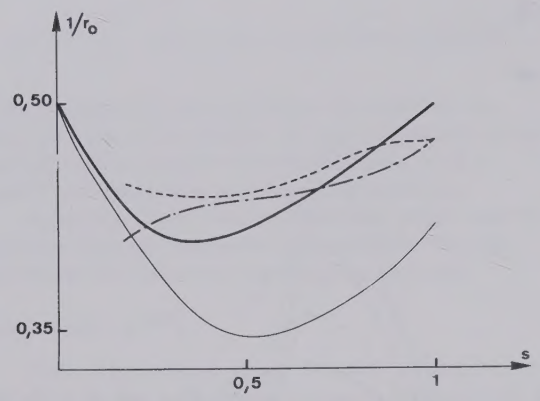

Fig. 4. Variations de la fréquence spatiale fondamentale pour laquelle on obtient le meilleur pouvoir de localisations en fonction de l'ouverture numérique relative du condenseur. Outre les trois objets considérés à la fig. 3, la courbe en trait plein fin est relative au cas des objets périodiques de faible contraste.

cédemment, nous y donnons également le cas des objets périodiques faiblement contrastés pour lesquels on peut considérer qu'il y a filtrage des fréquences spatiales en intensité [7].

4. CONCLUSIONS

Cette étude sur la localisation des extrêmes d'éclairement d'objets périodiques en éclairage partiellement cohérent nous montre donc que le pouvoir de localisation est d'autant meilleur que le degré de cohérence partielle est plus grand. Il faut toutefois remarquer que ce résultat n'est valable que si le rapport signal sur bruit ne varie pas avec le degré de cohérence et par conséquent que l'énergie transmise par le condenseur reste constante quelle que soit l'ouverture relative de ce dernier. Par contre, si les conditions expérimentales sont telles que la luminance de la source reste constante, l'énergie transmise est alors proportionnelle à la surface de l'ouverture du condenseur, c'est-à-dire à s^2, et le rapport signal sur bruit R est alors proportionnel à s. Dans ce cas le résultat énoncé précédemment est inversé et le pouvoir de localisation s'améliore d'autant que le degré de cohérence partielle est plus faible. Par contre, quelque soit le mode d'éclairage utilisé, le pouvoir de localisation croît avec l'étendue du spectre de fréquences spatiales en amplitude de l'objet. La fréquence spatiale pour laquelle on obtient le meilleur pouvoir de localisation pour une ouverture donnée du condenseur varie peu (fig. 4) avec l'étendue du spectre de l'objet. Par conséquent, quelque soit l'objet considéré, on peut choisir le degré de cohérence spatiale optimal uniquement en fonction de la période de l'objet.

REMERCIEMENTS

Nous adressons nos remerciements à MM. P. K. Mondal et S. Slansky qui ont mis à notre disposition les calculs d'images d'objets d'amplitudes sinusoïdale et en créneau [6].

REFERENCES

[1] G. Nomarski et G. Roblin, Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris) 261 (1965) 3556.
[2] G. Roblin, Opt. Acta 17 (1970) 189.
[3] A. Maréchal et M. Françon, Diffraction. Structure des images (Rev. Opt., Paris, 1960).
[4] H. H. Hopkins, Proc. Roy. Soc. A217 (1953) 408.
[5] N. Gros et G. Roblin, Rev. Opt. 46 (1967) 249.
[6] P. K. Mondal et S. Slansky, Opt. Acta 17 (1970) 779.
[7] S. Slansky, J. Phys. (Paris) 20 (1959) 13 S.

LOCALISATION LATERALE D'UNE FRANGE D'INTERFERENCES A DEUX ONDES A L'AIDE D'UN RETICULE A PROFIL SINUSOIDAL

G. ROBLIN
Institut d'Optique, Laboratoire de Microscopie, Paris, France

Reçu le 10 mai 1971

The localization of a two-waves interference fringe is studied when a reticle with a sinusoidal profile is sweeping alternately in the plane of the object or of its image. The best accuracy conditions are discussed in terms of the various process variables. It is shown that the accuracy is better than the accuracy obtained when the fringe is sweeping by a slit.

1. INTRODUCTION

Dans le cas de la localisation d'une frange d'interférences à deux ondes à l'aide d'un réticule constitué d'une fente parallèle aux franges animée dans leur plan d'un mouvement alternatif de balayage [1], le signal optique, ou flux lumineux transmis par la fente lors de son mouvement, résulte, les fonctions étant paires, de la convolution d'une fonction périodique représentant la répartition en éclairements de l'objet et d'une fonction rectangle représentent la transparence uniforme de la fente. Cette opération étant commutative, le problème de la localisation d'un objet isolé tel un trait de profil rectangulaire et de transparence uniforme à l'aide d'un réticule à profil sinusoidal est identique. La précision de localisation sera équivalente si l'on respecte les mêmes conditions expérimentales quant à la période du réticule par rapport à la largeur du trait et à son amplitude de vibration.

Nous ne décrirons pas les procédés permettant de localiser un système de franges d'interférences dans le plan d'un objet et de déplacer ce réticule d'un mouvement alternatif. Ces procédés pratiques cités par ailleurs [2] permettent ce mouvement par modulation de la différence de chemin optique à l'intérieur de l'interféromètre produisant l'interférogramme. Ils font le plus souvent appel, outre les solutions mécaniques, à des effets électrooptiques [3], magnéto-optiques [4] ou photoélastique [5], offrant l'intérêt de créer une modulation sans mettre d'éléments mécaniques en mouvement.

2. PROBLEME DE LA LOCALISATION D'UN OBJET PERIODIQUE

Ces réticules vibrant à profil sinusoïdal existant et permettant donc la localisation d'un objet isolé, dans un but d'universalité instrumentale, nous avons étudié le problème de leur emploi pour la localisation d'objets périodiques dont la répartition en éclairements présente un axe de symétrie à l'intérieur d'une période. Il est évident que la localisation de ces objets est d'autant plus précise que leur spectre de fréquences spatiales en intensité est plus étendu, car leur répartition en éclairements présente des variations d'autant plus rapides. Nous nous sommes donc plus particulièrement intéressés à la localisation des franges d'interférences à deux ondes, objet de profil théoriquement sinusoidal dont les difficultés de pointé avec grande précision sont bien connues des expérimentateurs.

Soit donc (fig. 1) $I_q(x)$ la répartition en éclairements du réticule de période q que nous supposerons illimité et centré dans le champ à l'origine de son mouvement:

$$I_q(x) = \tfrac{1}{2}\,[1 + \cos\,(2\pi\, x/q)]\ .$$

L'objet constitué d'un système de franges d'interférences à deux ondes d'interfrange p, contenu dans un champ supposé rectangulaire de largeur ϵ pourra être représenté, si par exemple une frange claire est centrée dans ce champ, par:

$$I_p(x) = \tfrac{1}{2}\, R_{\epsilon/2}(x)\,[1 + \cos\,(2\pi\, x/p)]\ .$$

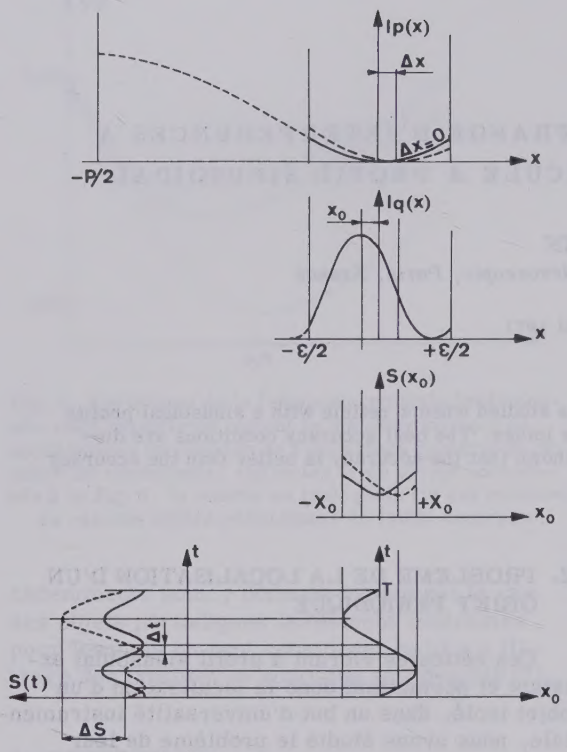

Fig.1. Une frange d'interférences à deux ondes d'interfrange p dont la répartition en éclairements est représentée par $I_p(x) = \frac{1}{2}[1 + \cos(2\pi x/p)]$ est balayée par un réticule à profil sinusoïdal de période q est de transparence $I_q(x) = \frac{1}{2}[1+\cos(2\pi x/q)]$ à l'interieur d'un champ rectangulaire de largeur ϵ. $S_0(x_0)$ est la variation du signal optique en fonction de l'abscisse x_0 du réticule. Un récepteur photoélectrique soumis à ce signal optique fournit un signal $S(t)$ représenté dans le cas particulier où le mouvement du réticule est sinusoïdal d'amplitude X_0 et de période T. Un écart à la localisation Δx produit un signal d'erreur dont la profondeur de modulation est ΔS.

Pour une abscisse x_0 du réticule, l'objet étant centré, le signal optique s'écrit:

$$S_0(x_0) = I_p(x) * I_q(x) \ .$$

Si le système de franges objet est décalé d'une quantité Δx, il apparait au point d'abscisse x_0 une variation de signal, ou signal d'erreur:

$$\Sigma(x_0) = S_{\Delta x}(x_0) - S_0(x_0)$$

$$= [I_p(x+\Delta x) - I_p(x)] * I_q(x) \ .$$

Soit en première approximation:

$$\Sigma(x_0) = -\frac{\pi \Delta x}{p}\,[R_{\epsilon/2}(x)\sin(2\pi x/p)] * I_q(x) \ .$$

Soit en représentant par les mêmes symboles minuscules les transformées de Fourier de variable u:

$$\sigma(u) = -\frac{\pi \Delta x}{p}\{r(u) * \tfrac{1}{2} j\,[\delta(u+1/p) - \delta(u-1/p)]\}\, i_q(u)$$

$$= -\frac{j}{4}\frac{\pi \Delta x}{p}\epsilon \left\{\frac{\sin(\pi\epsilon u)}{\pi\epsilon u} * [\delta(u+1/p) - \delta(u-1/p)]\right\}$$

$$\times\{\delta(u) + \tfrac{1}{2}[\delta(u+1/q) + \delta(u-1/q)]\}$$

$$= -\frac{j}{4}\frac{\pi \Delta x}{p}\epsilon \left\{\frac{\sin\pi\epsilon(u-1/p)}{\pi\epsilon(u-1/p)} - \frac{\sin\pi\epsilon(u+1/p)}{\pi\epsilon(u+1/p)}\right\}$$

$$\times\{\delta(u) + \tfrac{1}{2}[\delta(u+1/q) + \delta(u-1/q)]\}$$

$$= -\frac{\pi \Delta x}{p}\frac{\epsilon}{4}\left\{\frac{\sin\pi\epsilon(1/q-1/p)}{\pi\epsilon(1/q-1/p)} - \frac{\sin\pi\epsilon(1/q+1/p)}{\pi\epsilon(1/q+1/p)}\right\}$$

$$\times\frac{j}{2}\{\delta(u-1/q) - \delta(u+1/q)\} \ .$$

Si nous posons $q/p = b$, rapport de la période du réticule à celle de l'objet, $\epsilon/q = K$, nombre de périodes du réticule à l'intérieur du champ, le signal d'erreur s'exprime par:

$$\Sigma(x_0) = K\pi b\frac{\Delta x}{4}\left[\frac{\sin K(1-b)\pi}{K(1-b)\pi} - \frac{\sin K(1+b)\pi}{K(1+b)\pi}\right]$$

$$\times\sin(2\pi x_0/q) \ .$$

Ce signal d'erreur est donc une fonction sinusoïdale de l'abscisse du réticule.

Remarquons qu'en absence d'objet, le mouvement du réticule produit un signal analogue à celui qui caractérise la localisation d'une frange à deux ondes à l'aide d'une fente, soit:

$$F(x_0) = \tfrac{1}{2}\,R_{\epsilon/2}(x) * [1 + \cos(2\pi x/q)] =$$

$$= \tfrac{1}{2}\epsilon\ \left[1 + \frac{\sin K\pi}{K\pi}\cos(2\pi x_0/q)\right] \ .$$

L'existence de ce signal permet ainsi, dans le cas d'un mouvement sinusoïdal, d'effectuer le centrage de l'origine de la modulation dans le champ par annulation de ses harmoniques impaires. Cette opération étant effectuée (par mouvement de translation du diaphragme de champ ou du réticule), il y a intérêt à supprimer cette modulation en prenant un champ de largeur égale à un multiple entier de périodes du réticule (K entier). Ce résultat (acquis par réglage de la largeur du champ ou par variation de l'interfrange du réticule) permet d'associer la présence d'un objet périodique dans le champ de l'instrument à l'existence d'une modulation du signal.

Cette condition sur la valeur de K entraîne:

$$\sin K(1+b)\pi = -\sin K(1-b)\pi \ ,$$

d'où il résulte que le signal d'erreur produit par un écart à la localisation Δx s'exprime par:

$$\Sigma(x_0) = K\pi \frac{b}{b+1} \frac{\Delta x}{2} \frac{\sin K(1-b)\pi}{K(1-b)\pi} \sin(2\pi x_0/q)$$

$$= A \sin(2\pi x_0/q) \ .$$

La profondeur de modulation ΔS du signal d'erreur (fig. 1), quels que soient la loi de mouvement du réticule et le mode de traitement du signal photoélectrique fourni par un récepteur soumis au signal optique, est:

$$\Delta S = A\,[\sin(2\pi x_1/q) - \sin(2\pi x_2/q)] \ ,$$

x_1 et x_2 étant simplement les abscisses du réticule au cours de son mouvement rendant $\sin(2\pi x_0/q)$ respectivement maximal et minimal. Le maximum de cette profondeur de modulation, quelle que soit l'équation du mouvement, est obtenue pour toutes les valeurs de x_0 symétriques: $x_1 = -x_2 = (2k+1)q/4$. Pour atteindre ce résultat, il suffit de donner au réticule un mouvement alternatif d'amplitude $X_0 = q/4$ (le choix d'un ordre supérieur entraînerait une surmodulation parasite). Si le mouvement de la fente est sinusoïdal tel que $x_0 = X_0 \sin(2\pi t/T)$, la profondeur de modulation ΔS de $\Sigma(x_0)$ est la différence entre les valeurs du signal d'erreur aux instants consécutifs $t = (2k+1)\,T/4$:

$$\Delta S = 2A = K\pi \frac{b}{b+1} \Delta x \frac{\sin K(1-b)\pi}{K(1-b)\pi}.$$

Pour un écart à la localisation Δx donné et quelque soit le nombre de périodes du réticule compris dans le champ, la profondeur de modulation du signal d'erreur est maximale (fig. 2) lorsque la frange à localiser appartient à un système d'interfrange égal à la période du réticule ($b = 1$). Cette condition peut être réalisée par réglage de l'interfrange du réticule accompagné d'un réglage de la dimension du champ afin de conserver K entier. Dans ce cas $\Delta S = \frac{1}{2}\pi K\,\Delta x$.

3. COMPARISON DE LA METHODE A LA LOCALISATION PAR UNE FENTE

Dans le cas de la localisation d'une frange d'interférences à deux ondes à l'aide d'une fente, la sensibilité maximale est obtenue [6] avec une fente de largeur et d'amplitude de vibration égales à un quart d'interfrange.

Si l'on admet que la précision de la méthode

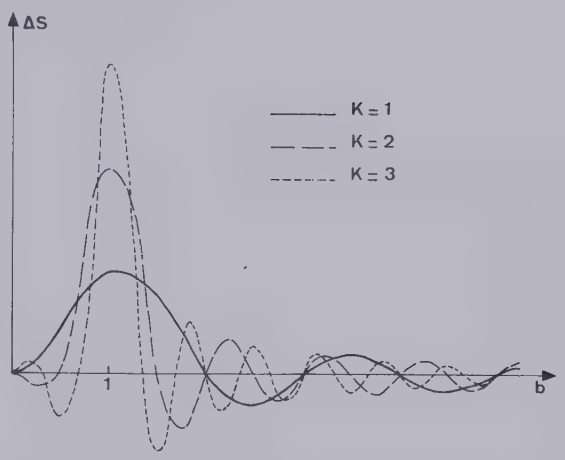

Fig. 2. Variations, pour un écart à la localisation Δx donné, de la profondeur de modulation du signal d'erreur ΔS en fonction du rapport b de la période du réticule à cell de l'objet. Ces variations sont données pour trois valeurs entières du nombre K de périodes du réticule à l'intérieur du champ.

soit uniquement limitée par le bruit de type Schottky de la chaîne de détection du signal photoélectrique, l'écart minimal à la localisation pour ce type d'expériences est donné par:

$$\delta x_F = (1/\pi)(e\Delta f p)^{1/2} \ ,$$

e étant la charge de l'électron, Δf la bande passante.

Si l'on fait la même hypothèse dans le cas de la localisation à l'aide d'un réticule à profil sinusoïdal et si l'on se place dans les conditions optimales établies au paragraphe précédent, l'écart minimal est déterminé par le bruit:

$$B = \tfrac{1}{2}\pi K \delta x_R = [2e\Delta f S_0(X_0)]^{1/2} \ ,$$

$S_0(X_0)$ étant la valeur du signal au niveau duquel on détecte le signal d'erreur maximal. Un calcul analogue à celui du précédent paragraphe, tenant compte des conditions optimales (K entier et $b = 1$), nous conduit à la valeur du signal:

$$S_0(X_0) = \frac{Kp}{4}\,[1 + \tfrac{1}{2}\cos(2\pi x_0/p)]$$

soit

$$S_0(X_0) = \frac{Kp}{4} \qquad (X_0 = p/4) \ .$$

D'où

$$\delta x_R = \frac{2}{K\pi}\left(\tfrac{1}{2}e\Delta f K p\right)^{1/2} = (1/\pi)\left[2e\Delta f p/K\right)^{1/2} .$$

Toutes choses égales par ailleurs l'incertitude sur la localisation à l'aide d'un réticule sinusoïdal est donc $(2/K)^{1/2}$ fois plus grande que sur la localisation à l'aide d'une fente. L'emploi du réticule sinusoïdal améliore donc la précision si $K > 2$, c'est-à-dire si le champ de mesure comporte au moins deux franges.
En réalité comme la localisation s'effectue toujours dans le plan de l'image du système de franges fournie par un instrument d'optique, l'on sait, notamment en éclairage incohérent [7], qu'il est nécessaire de prendre un champ comportant au minimum environ dix franges pour obtenir une image dont la répartition des éclairements soit sinusoïdale. Dans cette condition l'amélioration sera au moins doublée. Notons pour fixer un ordre de grandeur que pour un système de franges à deux ondes d'interfrange 5 μ observé avec un objectif de grandissement 60, le champ contient 50 franges. Dans ce cas l'emploi d'un réticule sinusoïdal de période 0.3 mm dans le plan de l'image multiplie la précision par 5 par rapport à l'emploi d'une fente.

4. CONCLUSIONS

Il est donc possible de localiser une frange d'interférences à deux ondes à l'aide d'un réticule à profil sinusoïdal animé d'un mouvement alternatif, en particulier sinusoïdal. Pour obtenir la meilleure sensibilité, certaines conditions optimales, indépendantes de la loi de mouvement du réticule et du mode de traitement du signal photoélectrique, sont à réaliser. Elles imposent que les interfranges du réticule et de l'objet soient égaux, qu'ils soient contenus un nombre entier de fois dans le champ et que l'amplitude de modulation du réticule soit égale au quart de cet interfrange. Ces conditions étant remplies, dans le cas d'une modulation sinusoïdale, la précision obtenue sur la localisation d'une frange par cette méthode peut être plusieurs fois supérieure à celle que l'on obtient à l'aide d'un réticule constitué d'une fente.

REMERCIEMENT

Je remercie vivement Monsieur G. Nomarski pour l'intérêt bienveillant qu'il a constamment porté à cette étude.

REFERENCES

[1] G. Nomarski et G. Roblin, Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris) 261 (1965) 3556.
[2] G. Nomarski et G. Roblin, Cert. Add. Brev. no 94 294 du 30/4/68 (BF no 1 449 820 du 5/7/65).
[3] H. Takasaki, J. Opt. Soc. Am. 51 (1961) 462.
[4] M. Billardon, Thèse, Paris (1960).
[5] M. Billardon et J. Badoz, Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris) 262B (1966) 1672.
[6] N. Gros et G. Roblin, Rev. Opt. 46 (1967) 249.
[7] R. Barakat et S. Lerman, Appl. Opt. 6 (1967) 545.

Nouv. Rev. d'Optique appliquée, 1971, **2**, n° 4, pp. 209-216

Laboratoire de Microscopie Optique de l'Institut d'Optique Théorique et Appliquée
(Directeur G. Nomarski)

3-5, boulevard Pasteur — F 75-Paris (15e)

LOCALISATION PHOTOÉLECTRIQUE DES TRAITS. RECHERCHE DES CONDITIONS OPTIMALES

par

G. ROBLIN

Mots clés :
Traits
Optimisation

Key words :
Traces
Optimization

RÉSUMÉ

La localisation photoélectrique des traits est obtenue par le traitement du signal photoélectrique fourni par un récepteur soumis au flux lumineux transmis par une fente balayant l'image d'un trait. Or le choix de l'éclairage influe sur le profil de l'image du trait. Il en est donc de même de la forme du signal photoélectrique et ainsi la limite de précision de la méthode dépend de l'éclairage. Pour trois types d'éclairage classiques en optique instrumentale on recherche les valeurs optimales des paramètres expérimentaux produisant la meilleure sensibilité. On en déduit le choix du meilleur éclairage pour cette méthode de localisation par modulation du signal optique.

INTRODUCTION

Nous nous proposons d'examiner la localisation photoélectrique de traits à profil rectangulaire de contraste égal à un (clair sur fond sombre ou inversement) et de faible largeur. Pratiquement ces traits absorbants ou réfléchissants sont obtenus par photographie ou par métallisation de supports transparents ou opaques, observés en lumière transmise ou réfléchie à l'aide d'un instrument d'optique de type microscope. Le problème de la localisation des traits joue un rôle très important en métrologie dimensionnelle notamment grâce à ses applications dans les techniques de fabrication des microcircuits électroniques.

La méthode classique permettant la localisation d'un trait est analogue à celle que nous avons mis en œuvre pour la localisation des franges d'interférences [1] et consiste à traiter le signal photoélectrique fourni par un récepteur soumis au flux lumineux modulé par une fente balayant d'un mouvement alternatif l'image du trait donnée par un objectif. Le principe de ces instruments [2] est appliqué à de nombreux appareillages industriels ou de recherche qui ne diffèrent entre eux que par le mode d'obtention du balayage de la fente ou par la méthode de traitement du signal.

Outre les différents procédés de traitement récemment analysés [3], il est évident que le choix des paramètres tels la largeur de la fente et l'amplitude de son balayage conditionne la précision de localisation d'un trait de largeur donnée. Si l'influence de ces données a déjà été étudiée [4, 5], les auteurs ont seulement considéré que le flux transmis par la fente était égal au produit de convolution des fonctions rectangles représentant le trait et la fente. Mais en réalité, la fente balayant l'image du trait fournie par un instrument d'optique, le flux $\varnothing(x_0)$ transmis par la fente d'abscisse x_0 dans le plan de l'image est égal au produit de convolution de la répartition en éclairements

Nous adressons nos remerciements à Monsieur S. Slansky qui a programmé les fonctions I_i et F_i et calculé leurs valeurs et Monsieur P. Geleoc qui nous a aidé pour le montage et la manipulation de l'instrument

$I(x)$ de l'image du trait et de la fonction rectangle représentant la fente, soit :

$$\varnothing(x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x - x_0)\, I(x)\, \mathrm{d}x\,.$$

Or la répartition en éclairements $I(x)$ dépend de la nature de l'éclairage de l'objet et de la forme de la pupille de l'instrument, et si le profil du trait est rectangulaire, en général il n'en est pas de même de son image.

Nous allons donc préciser les valeurs optimales des paramètres mécaniques que sont la largeur de fente et son amplitude de balayage pour trois types d'éclairage de l'objet : cohérent, incohérent avec instrument à pupille rectangulaire et incohérent avec instrument à pupille circulaire en considérant deux procédés différents de traitement du signal photoélectrique.

I. CALCUL DU FLUX LUMINEUX

Nous considérons des traits dont la largeur a n'est pas très petite devant la limite de résolution $\lambda/2\,n \sin U_0$ de l'objectif (λ étant la longueur d'onde de la lumière et $n \sin U_0$ l'ouverture numérique de l'objectif). Cette limite de résolution sera utilisée comme unité. La largeur a s'exprime par

$$a = A\,\frac{\lambda}{2\,n \sin U_0}\,.$$

Si nous nous limitons au domaine $A \geqslant 1$, les traits les plus fins observés à l'aide d'un microscope très puissant auront une largeur de 0,2 μ, qui est une limite inférieure pratiquement jamais rencontrée.

Nous supposerons aussi que le trait est infiniment long.

Dans ces conditions l'instrument d'optique utilisé fournit une image d'un objet étendu et deux cas limites sont alors à considérer suivant que l'éclairage de cet objet est cohérent ou incohérent.

I.1. Cas de l'éclairage cohérent

La répartition de l'amplitude complexe image est égale à la somme des amplitudes correspondant aux divers points de l'objet [6] :

$$A(x', y') = \iint E(x' - x, y' - y)\, \Omega(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

$\Omega(x, y)$ représentant la transmission en amplitude de l'objet et $E(x' - x, y' - y)$ la répartition des amplitudes produites par un point source situé au point de coordonnées x, y, le grandissement transversal de l'instrument étant supposé égal à l'unité.

L'objet étant unidimensionnel, la répartition en amplitudes dans l'image $A(x)$ est donc égale au produit de convolution de la répartition en amplitudes dans l'objet $\Omega(x)$ et de la réponse percussionnelle en amplitude $E(x)$ dans la direction x de la pupille de l'instrument.

$$A(x) = \Omega(x) * E(x)\,.$$

L'éclairement $I(x)$ dans le plan de l'image est égal au carré du module de l'amplitude $A(x)$:

$$I(x) = |\, A(x)\,|^2\,.$$

Le flux lumineux transmis par la fente balayant cette image, ou signal optique $S(x)$, s'exprime par la convolution :

$$S(x) = I(x) * T(x)$$

où $T(x)$ est la transmission en énergie de la fente.

L'objet étant infiniment étendu dans la direction y, la pupille de l'instrument ne diffracte que dans la direction x et à un facteur près la réponse de la pupille est :

$$E(x) = \frac{\sin\left(\dfrac{2\pi x}{\lambda}\, n \sin U_0\right)}{\pi x} = \frac{2\,n \sin U_0}{\lambda}\,\frac{\sin \pi X}{\pi X}$$

si X est l'abscisse exprimée en unités optiques.

Dans le cas d'un trait clair de largeur a, sa répartition en amplitude peut être exprimée par :

$$\Omega_1(x) = \mathrm{Rect}\left(\frac{x}{a}\right) = \mathrm{Rect}\left(\frac{X}{A}\right)\,.$$

D'où la répartition en amplitudes dans le plan de l'image :

$$A_1(x) = A_1(X) = \int_{X-(A/2)}^{X+(A/2)} \frac{\sin \pi X}{\pi X}\, \mathrm{d}X$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{ \mathrm{Si}\left[\pi\left(X + \frac{A}{2}\right)\right] - \mathrm{Si}\left[\pi\left(X - \frac{A}{2}\right)\right]\right\}\,.$$

Si cette image est balayée par une fente de transparence uniforme et de largeur $\varepsilon = N\lambda/2\,n \sin U_0$ le signal optique est donné par :

$$S_1(X) = \int_{X-(N/2)}^{X+(N/2)} I_1(X)\, \mathrm{d}X$$

avec

$$I_1(X) = |\, A_1(X)\,|^2\,.$$

Pour un trait sombre dont la répartition en amplitude est :

$$\Omega_2(X) = 1 - \mathrm{Rect}\left(\frac{X}{A}\right)$$

la répartition en éclairements dans son image sera

$$I_2(X) = [1 - A_1(X)]^2\,.$$

Les figures 1 et 2 représentent respectivement les variations du signal optique normalisé $F(X) = S(X)/N$ à largeur de trait constante ($A = 4$) et à largeur de fente constante ($N = 4$).

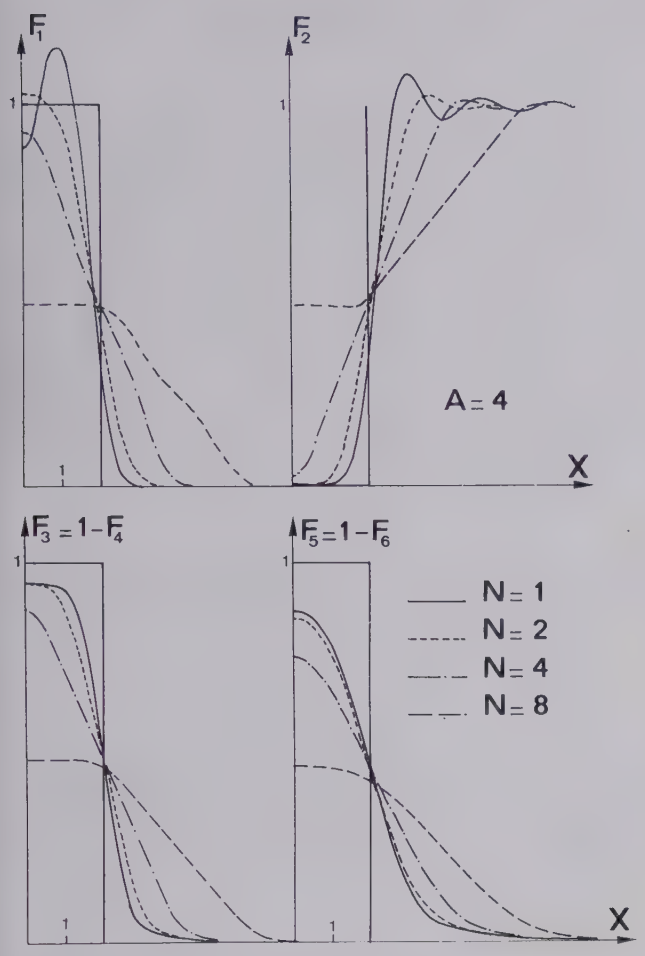

FIG. 1. — *Variations du signal optique normalisé résultant du produit de convolution d'un trait de largeur $A = 4$ et d'une fente de largeur N ($N = 1, 2, 4$ et 8) en fonction de l'abscisse X de la fente. Les longueurs sont exprimées en unité optique $\lambda/2\, n \sin U_0$, λ étant la longueur d'onde de la lumière et $n \sin U_0$ l'ouverture numérique de l'objectif. On a respectivement pour :*

— *un trait clair en éclairage cohérent : F_1,*

— *un trait sombre en éclairage cohérent : F_2,*

— *un trait clair en éclairage incohérent avec pupille rectangulaire : F_3,*

— *un trait sombre en éclairage incohérent avec pupille rectangulaire : F_4,*

— *un trait clair en éclairage incohérent avec pupille circulaire : F_5,*

— *un trait sombre en éclairage incohérent avec pupille circulaire : F_6.*

FIG. 1. — *Variation of the optimal signal (width $A = 4$, Slit $N = 1, 2, 3, 4$ and 8) as a fonction of slit abszissa X.*

F_1 Coherent illumination, clear trace

F_2 C. ill. dark trace

F_3 Clear trace incoherent illumination rectangular pupil.

F_4 Dark trace incoherent illumination, rectangular pupil

F_5 Clear trace incoherent illumination round pupil

F_6 Dark trace incoherent illumination round pupil.

I.2. Cas de l'éclairage incohérent

La répartition des éclairements dans l'image est la somme des éclairements produits par les images des différents points de l'objet [6] :

$$I(x', y') = \iint O(x, y)\, D(x' - x, y' - y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

$O(x, y)$ représentant la répartition des éclairements dans l'objet et $D(x' - x, y' - y)$ l'image d'un point de coordonnées x, y, le grandissement transversal de l'instrument étant supposé égal à l'unité.

Dans ce cas outre l'influence des aberrations de l'instrument et éventuellement de la diffusion dans le plan de l'image, la forme de la pupille intervient dans l'expression de la fonction D. Nous nous limiterons au cas d'un instrument parfait, dénué de toute aberration, la pupille pouvant être soit rectangulaire, soit circulaire.

On calcule successivement la répartition en éclairements dans le plan de l'image : $I = O * D$, puis les variations $S = I * T$ du signal optique dû au balayage de cette image par une fente de facteur de transmission en intensités T. L'objet $O(x)$ est égal

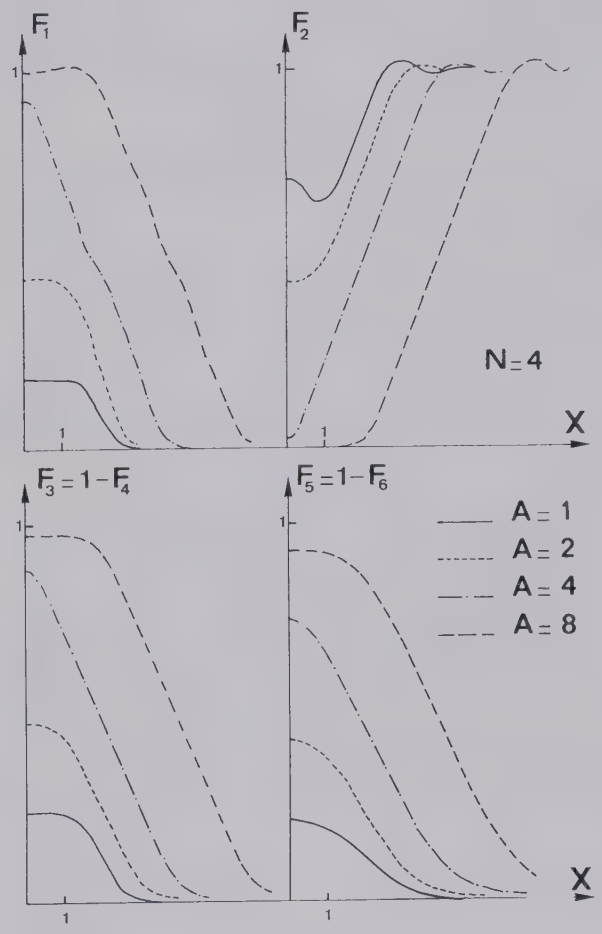

FIG. 2. — *Variations du signal optique normalisé résultant du produit de convolution d'un trait de largeur A ($A = 1, 2, 4$ et 8) et d'une fente de largeur $N = 4$ en fonction de l'abscisse X de la fente. Les différents F_i sont définis comme pour la figure* 1.

FIG. 2. — *Variation of the normalized optical signal (width $A = 1, 2, 3, 4, 8$, slit width $N = 4$), F_i see Fig.* 1.

soit à $\mathrm{Rect}\left(\frac{X}{A}\right)$ s'il s'agit d'un trait clair, soit à

$$\left[1 - \mathrm{Rect}\left(\frac{X}{A}\right)\right]$$

s'il s'agit d'un trait sombre.

a) **Pupille rectangulaire :** Dans ce cas

$$D(x) = \left(\frac{\sin \pi X}{\pi X}\right)^2 .$$

L'image du trait clair est donnée par :

$$I_3(X) = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{\sin^2 \pi(X - A/2)}{\pi(X - A/2)} - \frac{\sin^2 \pi(X + A/2)}{\pi(X + A/2)} + \right.$$
$$\left. + \mathrm{Si}\left[2\pi\left(X + \frac{A}{2}\right)\right] - \mathrm{Si}\left[2\pi\left(X - \frac{A}{2}\right)\right]\right\} .$$

L'image du trait sombre est :

$$I_4(X) = 1 - I_3(X) .$$

Les signaux optiques sont respectivement égaux à :

$$S_3(X) = \int_{X-(N/2)}^{X+(N/2)} I_3(X)\,\mathrm{d}X \quad \text{et} \quad S_4(X) = N - S_3(X) .$$

Les figures 1 et 2 représentent respectivement les variations du signal optique normalisé

$$F_3(X) = 1 - F_4(X)$$

à largeur de trait constante ($A = 4$) et à largeur de fente constante ($N = 4$).

b) **Pupille circulaire :** Dans ce cas nous établissons la répartition des éclairements dans l'image d'un trait à partir de l'expression de l'image d'un bord de plage fournie par un instrument stigmatique à pupille circulaire qui nous est connue [6].

Il vient alors pour un trait clair :

$$I_5(X) = \frac{2}{\pi}\left\{\int_{Z-z/2}^{\infty} \frac{H_1(2Z)}{Z^2}\,\mathrm{d}Z - \int_{Z+z/2}^{\infty} \frac{H_1(2Z)}{Z^2}\,\mathrm{d}Z\right\}$$

avec

$$Z = \pi X \quad \text{et} \quad z = \pi A .$$

Pour les besoins du calcul numérique il sera plus avantageux d'écrire cette fonction sous une forme utilisant des fonctions développables et tabulées :

$$I_5(X) = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{H_1(Z - z/2)}{Z - z/2} - \frac{H_1(Z + z/2)}{Z + z/2} + \right.$$
$$\left. + \int_{Z-z/2}^{\infty} \frac{H_0(t)}{t}\,\mathrm{d}t - \int_{Z+z/2}^{\infty} \frac{H_0(t)}{t}\,\mathrm{d}t\right\}$$

H_1 et H_0 sont les fonctions de Struve d'ordres 1 et 0.

L'image du trait sombre est donnée par

$$I_6(X) = 1 - I_5(X) .$$

Les signaux optiques relatifs au balayage de traits clair S_5 et sombre S_6 sont respectivement égaux à :

$$S_5(X) = \int_{X-(N/2)}^{X+(N/2)} I_5(X)\,\mathrm{d}X$$

et

$$S_6(X) = N - S_5(X) .$$

Les figures 1 et 2 représentent respectivement les variations du signal normalisé $F_5(X) = 1 - F_6(X)$ à largeur de trait constante ($A = 4$) et largeur de fente constante ($N = 4$).

II. SENSIBILITÉ DE LA LOCALISATION PHOTOÉLECTRIQUE

L'examen des figures 1 et 2 montre déjà des différences importantes entre les variations du signal optique pour les trois types d'éclairage considérés.

L'on peut prévoir *a priori* que le choix des paramètres expérimentaux, de même qu'éventuellement celui de la méthode de traitement du signal photoélectrique, pourra dépendre de la nature de l'éclairage de l'objet. Notamment les modulations secondaires qui existent en éclairage cohérent ou la différence de pente dans la zone abrupte en éclairage incohérent selon que la pupille est rectangulaire ou circulaire, ne permettent pas de traiter le signal optique comme la simple fonction trapèze résultant du produit de convolution de deux fonctions rectangles.

Néanmoins en ce qui concerne les traits, et dans les trois cas étudiés, l'axe de symétrie de l'image, de même que celui du signal optique coïncident toujours avec l'axe de symétrie de l'objet. Il n'y aura donc pas, à la différence du cas du bord de plage [7], de possibilité de commettre des erreurs systématiques et la localisation d'un trait revient toujours à localiser l'axe de symétrie du signal optique $S(X)$. La figure 3 montre la transformation de ce signal optique en signal photoélectrique $S(t)$ quand la fente est animée d'un mouvement sinusoïdal d'amplitude X_0 et de période T et qu'un récepteur photoélectrique est soumis au flux lumineux qu'elle transmet. Le changement d'espace $X = X_0 \sin 2\pi t/T$ entraîne une distorsion du signal photoélectrique $S(t)$ par rapport au signal optique $S(X)$. Nous avons montré en I et II (en choisissant respectivement mais arbitrairement le cas d'un trait clair et celui d'un trait sombre) le résultat obtenu pour des modulations partielle et totale suivant qu'au cours de son mouvement la fente découvre partiellement ou totalement le bord du trait.

Pour détecter l'annulation de l'écart ΔX à la localisation, les méthodes de traitement du signal photoélectrique utilisées peuvent être classées en deux groupes suivant qu'elles sont basées sur l'annulation de la variation de signal ΔS entre deux instants différents de $T/2$ ou sur l'annulation de la variation de différence de temps Δt entre deux instants où le signal a même

niveau. La plus petite limite détectable de l'écart à la localisation latérale d'un trait est le plus petit écart δX entraînant les variations δS ou δt à la limite de la détection. Ce sont ces deux cas que nous examinerons successivement.

II.1. Localisation par détection de variation de niveau

Cette méthode de traitement du signal photoélectrique exige une modulation partielle du signal optique (fig. 3.I) et n'est pas couramment employée pour ce type d'objet. Elle présente néanmoins un sérieux avantage lorsque le champ de l'instrument comporte différents objets très rapprochés comme cela peut arriver dans le cas des micro-circuits. En effet dans ce cas l'emploi d'une grande amplitude de modulation risque de compliquer l'allure du signal photoélectrique par balayage de plusieurs objets. Par contre l'emploi d'une faible amplitude de modulation offre des possibilités intéressantes, permettant par exemple d'obtenir indifféremment la localisation d'un trait, ou celle de son bord ce qui conduit à mesurer sa position et sa largeur.

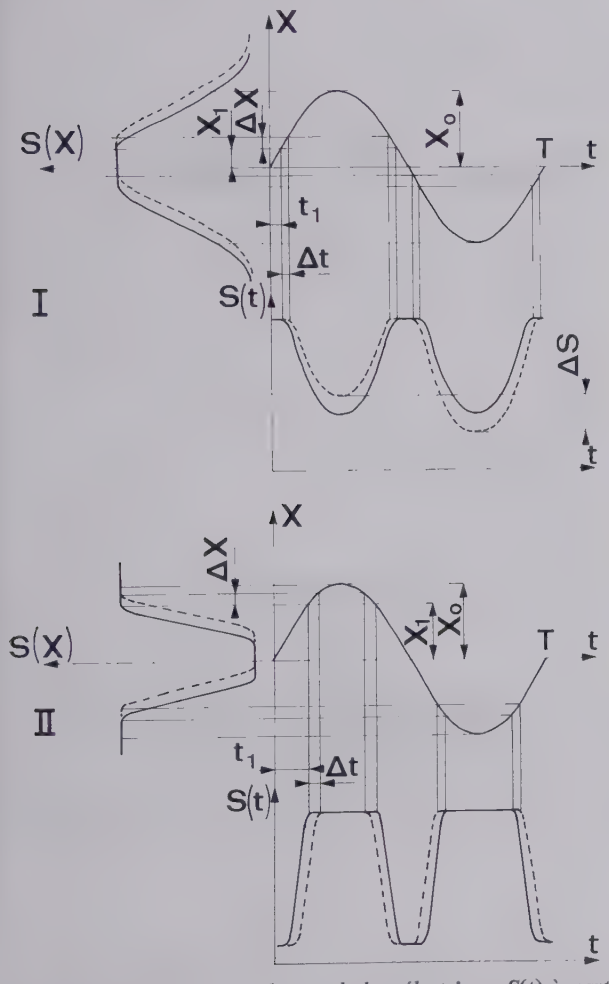

FIG. 3. — *Etablissement du signal photoélectrique $S(t)$ à partir du signal optique $S(X)$. A chaque instant t le signal photoélectrique prend une valeur proportionnelle à la valeur du signal $S(X)$ transmis par la fente d'abscisse $X = X_0 \sin 2\pi t/T$.*

On a représenté en I le cas de la modulation partielle d'un trait clair, en II le cas de la modulation totale d'un trait sombre.

FIG. 3. — *Construction of the photoelectric signal $S(t)$ from optical signal $S(x)$. I partial modulation of a clear trace, II full modulation of a dark trace.*

Le traitement du signal photoélectrique fait appel aux techniques d'amplification à détection synchrone. L'amplitude de la composante du signal à la fréquence de modulation (et de toutes les harmoniques impaires) étant proportionnelle à l'écart ΔX, l'annulation de cette composante met en évidence la localisation du trait.

Nous choisissons l'amplitude de modulation X_0 de la fente de telle sorte que :

1. — *le signal optique* varie linéairement avec l'écart, c'est-à-dire que $F(X_0)$ soit situé sur la partie quasi-linéaire à variation rapide de la fonction F ;

2. — *le taux de modulation* du signal photoélectrique, ou contraste, ne soit pas trop petit et par exemple ne soit jamais inférieur à 1/3 :

$$C = \frac{S(t)_{\max} - S(t)_{\min}}{S(t)_{\max} + S(t)_{\min}} \geqslant \frac{1}{3}$$

ce qui entraîne le fait que la profondeur de modulation doit au moins être égale à la moitié du signal maximum.

Ainsi, si m est la pente de la partie linéaire à variation rapide de $F(X)$, la variation de signal ΔS telle que définie par la figure 3 en fonction d'un écart à la localisation ΔX est donnée par :

$$\Delta S = 2\, mN\, \Delta X\,.$$

Si δS est la plus petite variation du signal détectable, la limite de l'écart à la localisation latérale δX d'un trait est :

$$\delta X = \frac{\delta S}{2\, mN}\,.$$

Si la détection de la variation du signal est limitée par le bruit B de la chaîne de détection et si le bruit de Schottky, proportionnel à la racine carrée du signal est prépondérant, on obtient en posant $\delta S = B$:

$$\delta X_i = \frac{B_i}{2\, m_i\, N} = \frac{B_0 \sqrt{S_i(X_0)}}{2\, m_i\, N}$$

$$\frac{\delta X_i}{B_0} = \frac{\sqrt{S_i(X_0)}}{2\, m_i\, N} = \frac{1}{2\, m_i} \sqrt{\frac{F_i(X_0)}{N}}$$

B_0 étant le bruit correspondant à un signal unité, i se rapportant à chacun des six cas étudiés au paragraphe précédent.

Pour chaque valeur de largeur de fente N, il existe une valeur de l'amplitude de modulation X_0 pour laquelle δX est minimal pour une valeur donnée de la largeur de trait A.

Le minimum minimorum de la limite δX pour chaque valeur de A nous impose les valeurs optimales pour la largeur de fente N et pour son amplitude de modulation X_0.

La figure 4 nous donne, en fonction de la largeur du trait A les valeurs optimales de N et X_0, ainsi que les limites d'écart minimales $\delta X/B_0$ obtenues dans ces conditions d'expériences, les indices des courbes correspondant aux indices des six cas étudiés au précédent paragraphe. Les résultats sont environ

deux fois meilleurs pour l'éclairage cohérent que pour l'éclairage incohérent avec un instrument à pupille circulaire. En éclairage incohérent avec un instrument à pupille rectangulaire les résultats sont intermédiaires.

La figure 4 nous donne également les valeurs du rapport signal sur bruit R obtenues dans ces conditions d'expériences. Nous constatons que celles-ci ne sont pas identiques pour les trois types d'éclairage. Il est préférable de se placer dans des conditions telles que R soit le même pour les trois types d'éclairage afin de travailler dans les mêmes conditions de détection dans tous les cas. Pour que cette valeur commune soit la meilleure possible, il convient de choisir celle qui est obtenue en éclairage incohérent avec pupille circulaire. Avec ce choix, nous allons étudier ce que deviennent les valeurs optimales des paramètres et les limites d'écart minimales qu'elles permettent.

La valeur du rapport signal sur bruit est telle que pour chaque valeur de A :

$$B_0\, R(A) = \sqrt{NF(X_0)}\,.$$

Pour nous placer dans des conditions expérimentales telles que le rapport signal sur bruit soit le même pour un type de trait donné (clair ou sombre) dans les trois types d'éclairage, il faut donc que :

$$N_1\, F_1(X_1) = N_3\, F_3(X_3) = N_5\, F_5(X_5)$$
$$N_2\, F_2(X_2) = N_4\, F_4(X_4) = N_6\, F_6(X_6)$$

N_5 et N_6 d'une part, X_5 et X_6 d'autre part étant les valeurs optimales de N et X_0 pour les cas 5 et 6.

Pour chaque cas 1 à 4 il existe alors un couple de valeurs N_i et X_i tel que :

1) les équations ci-dessus soient vérifiées ;

2) X_i soit à l'intérieur de l'intervalle où $F_i(X)$ est linéaire et où $C \geqslant 1/3$, condition que nous avons fixée précédemment *a priori* ;

3) δX_i soit minimal.

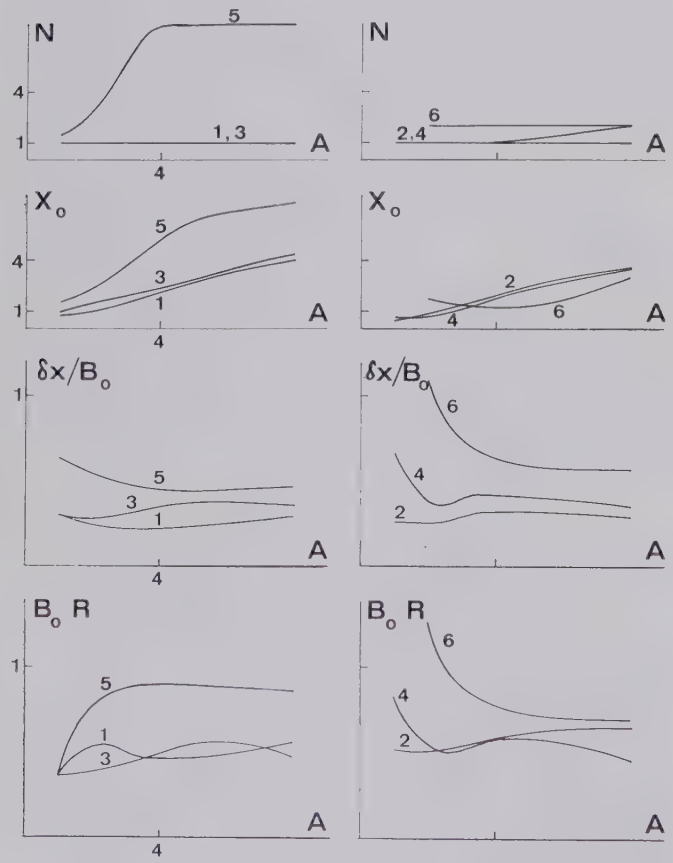

FIG. 4. — *Détection par annulation d'une variation de niveau ΔS (fig. 3) du signal. Valeurs optimales en fonction de la largeur du trait A des paramètres expérimentaux : largeur de fente N et amplitude de modulation X_0. Ecarts minimaux à la localisation δx qu'elles permettent et variations du rapport signal sur bruit R dans ces conditions. Les indices des courbes sont ceux des signaux optiques tels que définis à la légende de la figure* 1.

FIG. 4. — *Detection by annulment of the variation of the level ΔS (fig. 3) of the signal. Optimal values of slit width N, modulation amplitude X_0 minimum deviation of localization S_x and signal to noise ratio R for the* 6 *cases defined in Fig.* 1.

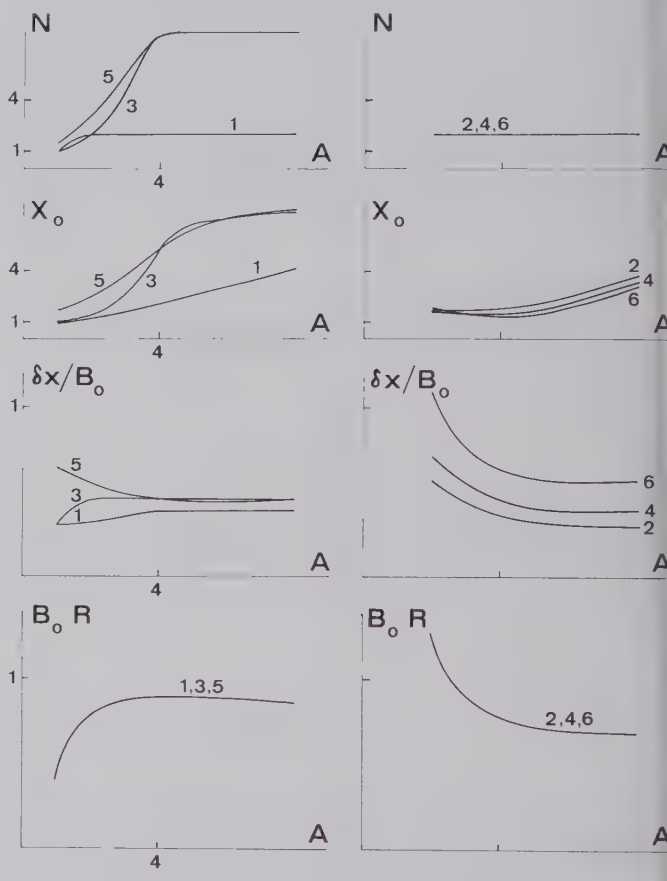

FIG. 5. — *Détection par annulation d'une variation de niveau ΔS (fig. 3). Valeurs optimales des paramètres expérimentaux, largeur de fente N et amplitude de modulation X_0, en fonction de la largeur du trait A. Ecarts minimaux à la localisation δx qu'elles permettent à rapports signal sur bruit R identiques, pour un contraste donné de l'objet (clair ou sombre), pour les trois types d'éclairage. Les indices des courbes sont ceux des six cas définis à la légende de la figure* 1.

FIG. 5. — *See Fig.* 4 *for ordinates.*

La figure 5 donne en fonction de A les valeurs optimales de N et X_0 et les limites d'écart minimales δX, le rapport signal sur bruit correspondant aux trois types d'éclairage étant identique pour chacun des types de trait (clair ou sombre).

II.2. Localisation par détection d'un écart temporel

Cette méthode mettant en œuvre des techniques électroniques de mise en forme, différenciation ou

intégration du signal bien connues, est la plus couramment utilisée. Nous la schématisons en considérant qu'un écart à la localisation ΔX entraîne à un niveau de signal donné un écart temporel Δt. Nous choisissons par exemple (fig. 3) le niveau maximum de $S(t)$.

Cette valeur caractéristique est obtenue à un temps t_1 lorsque l'abscisse de la fente est X_1 telle que

$$X_1 = X_0 \sin \frac{2\pi t_1}{T}.$$

Un écart à la localisation ΔX produit un écart Δt tel que :

$$\Delta X = \frac{2\pi X_0}{T} \cos \frac{2\pi t_1}{T} \Delta t.$$

D'où si δt est la plus petite variation de temps détectable, la limite δX de l'écart à la localisation d'un trait est :

$$\delta X = \frac{2\pi}{T} \sqrt{X_0^2 - X_1^2}\, \delta t.$$

La recherche des solutions optimales diffère suivant qu'il s'agit de traits clairs ou sombres.

a) *Pour les traits clairs*, nous choisissons encore une amplitude de modulation de la fente vérifiant la condition énoncée au paragraphe précédent quant au taux de modulation du signal photoélectrique ($C \geqslant 1/3$).

Pour chacun des types d'éclairage, pour chaque valeur de la largeur de fente N il existe une valeur de l'amplitude de modulation X_0 pour laquelle δX est minimal pour une largeur donnée de trait A.

Pour chaque valeur de A on choisit les couples de valeurs optimales de la largeur de fente N et de son amplitude de modulation X_0 de telle sorte que le rapport signal sur bruit

$$R = \frac{1}{B_0} \sqrt{N_i F_i(X_1)}$$

soit comparable à largeur de trait égale pour les trois cas d'éclairage et de pupille.

b) *Pour les traits sombres* (fig. 3.II) où le niveau du signal choisi est celui du fond, la modulation doit être totale et nous choisissons arbitrairement une amplitude de modulation X_0 telle que :

$$\sqrt{X_0^2 - X_1^2} = 1$$

ce qui entraîne une limite de précision constante quelles que soient la largeur du trait et la nature de l'éclairage (le choix d'une autre valeur pour $\sqrt{X_0^2 - X_1^2}$ multiplie δX par cette valeur).

Notons qu'alors le niveau du signal normalisé $F_i(X_1)$ étant celui du fond, donc égal à 1, le rapport signal sur bruit est :

$$R_i = \frac{1}{B_0} \sqrt{N_i}.$$

La figure 6, nous donne en fonction de la largeur du trait A les valeurs optimales de N et X_0, ainsi que les limites d'écart minimales dx obtenues dans ces conditions d'expériences, les indices des courbes étant ceux des six cas étudiés au paragraphe précédent. Elle nous donne également les valeurs du rapport signal sur bruit obtenues dans les mêmes conditions.

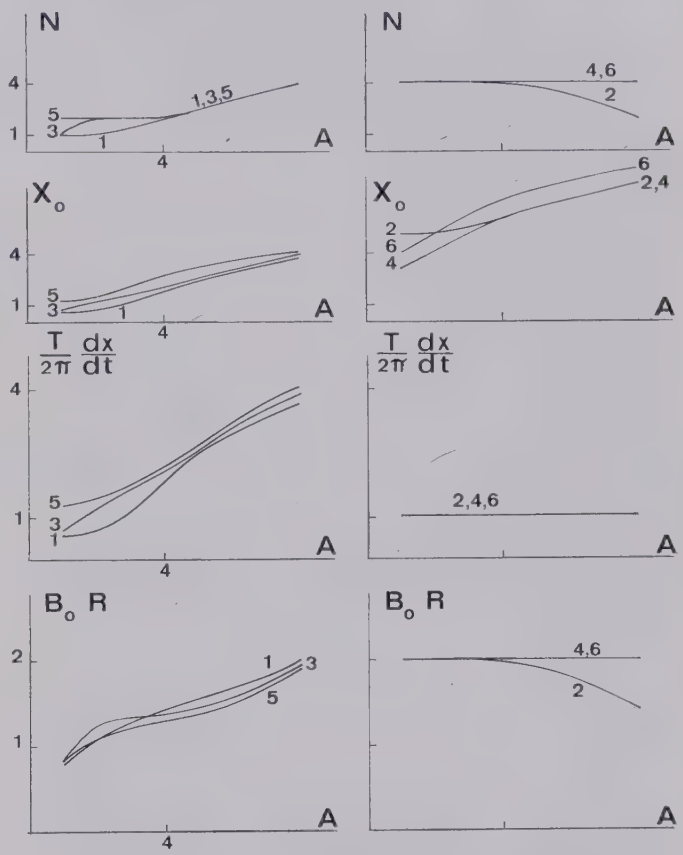

FIG. 6. — *Détection par annulation d'un écart temporel Δt (fig. 3). Valeurs optimales des paramètres expérimentaux, largeur de fente N et amplitude de modulation X_0, en fonction de la largeur de trait A. Ecarts minimaux à la localisation* dx *qu'elles permettent à rapports signal sur bruit R comparables, pour un contraste donné de l'objet (clair ou sombre), pour les trois types d'éclairage. Les indices des courbes sont ceux des six cas définis à la légende de la figure* 1.

FIG. 6. — *Detection by annulment of a time deviation* Δ + *(fig. 3). See Fig. 4 for ordinates.*

CONCLUSIONS

Dans cette étude sur la localisation photoélectrique des traits, nous avons voulu déterminer les valeurs optimales des paramètres expérimentaux conduisant à la meilleure précision de localisation pour trois types d'éclairage. Nous avons mis en évidence l'influence de la nature de l'éclairage sur la précision de localisation. Nous avons de plus considéré deux cas de traitement du signal photoélectrique. Si nous ne pensions pas *a priori*, à cause du profil symétrique de l'objet, que le choix de l'éclairage puisse introduire des erreurs systématiques, comme pour le bord de plage [7], nous pensions que les variations du profil de l'image du trait suivant la nature de l'éclairage pouvaient apporter des différences de sensibilité. Ceci devait être en particulier plus évident pour les expériences faisant appel à une modulation partielle où la variation du signal optique est utilisée pour la détection, la sensibilité dépendant alors de la pente du signal. Par analogie avec la localisation des franges d'interférences à deux ondes utilisant nécessairement une modulation par-

tielle [8], il est vraisemblablement possible de déterminer les valeurs optimales des paramètres expérimentaux conduisant à la meilleure sensibilité.

L'emploi d'une telle modulation partielle du signal optique est d'ailleurs très intéressante dans le cas où l'objet présente différentes structures rapprochées de formes et de dimensions variées. Ainsi le signal optique n'est pas entaché de phénomènes parasites dus au balayage d'objets voisins. L'emploi de cette modulation entraîne un traitement du signal photoélectrique par détection d'une variation de signal entre deux instants donnés.

Dans ce cas (fig. 5) la limite de l'écart à la localisation δx est plus petite en éclairage cohérent qu'en éclairage incohérent. La précision est en effet deux fois meilleure en éclairage cohérent qu'en éclairage incohérent avec pupille circulaire, notamment en ce qui concerne les traits sombres (indices pairs) et les traits clairs de faible largeur. L'éclairage incohérent avec pupille rectangulaire fournit une sensibilité intermédiaire proche de celle de l'éclairage cohérent. Cet éclairage offre de plus l'avantage de permettre l'emploi d'une fente de largeur N constante (de l'ordre de deux fois la limite de résolution de l'objectif) quels que soient la largeur du trait et son type de contraste. La valeur optimale de l'amplitude de modulation X_0, quant à elle, doit croître régulièrement avec la largeur du trait. Ces résultats sont obtenus avec des rapports signal sur bruit R identiques pour les trois types d'éclairage et de pupille pour une largeur de trait donnée. Néanmoins pour les deux éclairages les plus favorables, si l'on consent à diminuer la valeur du rapport signal sur bruit d'environ 40 % (fig. 4), on constate une amélioration de la sensibilité quelle que soit la largeur du trait, et elle est notable pour les traits sombres de faible largeur.

Mais ce sont les méthodes de traitement de signal apparentées à la détection par annulation d'une variation de différence de temps entre deux instants à niveau de signal donné qui sont le plus couramment utilisées. L'emploi de la modulation totale qu'elles exigent pour la localisation des traits sombres présente l'inconvénient de pouvoir faire apparaître des phénomènes parasites dus au balayage d'objets voisins.

Dans ce cas (fig. 6), il existe toujours une valeur de l'amplitude de modulation X_0 permettant de localiser les traits sombres (indices pairs) avec la même sensibilité quels que soient la largeur du trait et le type d'éclairage utilisé pourvu que la modulation soit totale. En ce qui concerne la localisation des traits clairs (indices impairs) l'éclairage cohérent offre un réel avantage, l'écart minimal dx étant deux fois plus faible qu'en éclairage incohérent avec pupille circulaire (jusque $A \simeq 3$). Il en est de même de l'éclairage incohérent avec pupille rectangulaire, jusque $A \simeq 1{,}5$. Néanmoins l'emploi de cet éclairage est souhaitable car le choix d'un niveau de signal donné est difficile en éclairage cohérent à cause des modulations secondaires du signal optique. Les conditions optimales sont identiques pour les trois types d'éclairage, la largeur de fente N devant croître avec la largeur du trait A dans le cas du trait clair, l'amplitude de modulation X_0 devant également croître à peu près linéairement avec la largeur du trait tout en restant deux fois plus grande pour le trait sombre que pour le trait clair. Ces résultats sont obtenus pour des valeurs comparables du rapport signal sur bruit R à largeur de trait égale pour les trois types d'éclairage et de pupille. La précision serait encore améliorée pour les éclairages cohérent et incohérent avec pupille rectangulaire si l'on travaillait avec un rapport R plus faible, mais l'amélioration serait peu importante.

Par conséquent et quel que soit le mode de traitement de signal employé il semble qu'il soit préférable d'utiliser un éclairage cohérent pour localiser les traits. Si cet éclairage présente quelques difficultés de mise en œuvre dues à l'emploi d'une source laser, notamment par le manque de « propreté » des faisceaux, il sera encore très profitable d'utiliser un instrument à pupille rectangulaire avec éclairage incohérent, plutôt qu'un instrument à pupille circulaire muni du même éclairage communément employé. En ce qui concerne la variation des paramètres expérimentaux optimisés en fonction de la largeur du trait, les impératifs instrumentaux sont les mêmes pour les deux types d'instrument avec éclairage incohérent.

Cette étude a été effectuée avec deux formes simples de pupille et en prenant une fente de balayage à transparence uniforme. Nous pensons qu'il est possible d'améliorer encore la sensibilité de la méthode en optimisant la forme de la pupille et la loi de transparence de la fente afin de rendre maximale la pente du signal optique.

L'instrument expérimental mis au point au Laboratoire de Microscopie de l'Institut d'Optique [9] utilisant un éclairage incohérent à pupille circulaire (objectif 25 ×, sin $U_0 = 0{,}45$) présentait des paramètres assez proches des valeurs optimales ($N = 5$ et $X_0 = 4$ pour $A = 3{,}3$). Nous avons pu, en nous servant d'un amplificateur linéaire à détection synchrone, composé d'un amplificateur sélectif présentant un facteur de surtension de 25 et d'un détecteur synchrone, localiser des traits sombres d'une largeur de 2 μ avec un écart inférieur à 10^{-3} μ. La constante de temps du détecteur était de 1 s (la fréquence de modulation étant de 143 c/s).

BIBLIOGRAPHIE

[1] NOMARSKI (G.) et ROBLIN (G.), *C. R. Ac. Sc.*, 1965, **261**, p. 3556.

[2] FÜRTH (R.) *Proc. Phys. Soc.*, 1943, **55**, p. 34.

[3] KAROVIC (K.), *Optik*, 1970, **31**, n° 3, p. 220.

[4] CLARK (J. S.) et COOK (A. H.), *J. Sci. Inst.*, 1956, **33**, n° 9, p. 34.

[5] GOLDBERG (J. L.) et RITTER (H. J.), *Microtecnic*, 1964, **18**, n° 2, pp. 54 et 117.

[6] MARÉCHAL (A.) et FRANÇON (M.), Diffraction, Structures des Images, 1960, *Ed. Rev. Opt.*

[7] ROBLIN (G.), *Nouv. Rev. Opt. Appl.*, 1970, **1**, n° 3, p. 155.

[8] GROS (N.) et ROBLIN (G.), *Rev. Opt.*, 1967, *46*, n° 5, p. 249.

[9] NOMARSKI (G.) et ROBLIN (G.), 1967, Catalogue 61e Exp. Sté Fra Phys., p. 68.

(Manuscrit reçu le 8 mars 1971)

Imprimé en France. — Editions MASSON et Cie
Imprimerie JOUVE, 12, rue de Tournon, Paris 6e

Nouv. Rev. d'Optique appliquée, 1970, **1**, n° 3, pp. 155-160

Laboratoire de Microscopie Optique (Directeur : G. Nomarski)
de l'Institut d'Optique Théorique et Appliquée
3-5, *Boulevard Pasteur — F 75-Paris* (15e)

SUR LA LOCALISATION DU BORD DE PLAGE

par

Gérard ROBLIN

1. Cas du bord de plage parfait

On considère un bord de plage dont la répartition spatiale en éclairements est $E(x) = 0$ si $x < 0$,

$$E(x) = E_0 \quad \text{si} \quad x > 0 .$$

On s'intéresse à la méthode de localisation d'un bord de plage à l'aide d'une fente de largeur ε, de longueur l, dont la transmission est représentée par la fonction rectangle $R(x)$.

Le flux lumineux $\Phi(x_0)$ transmis par la fente au point d'abscisse x_0 est égal au produit de convolution des fonctions objet et fente, soit

$$\Phi(x_0) = E(x_0) * R(x_0)$$

ou

$$\Phi(x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(x)\, R(x_0 - x)\, dx .$$

Si la fente est animée d'un mouvement sinusoïdal tel qu'à chaque instant t son abscisse x soit

$$x = X_0 \sin (2\pi t/T),$$

le signal photoélectrique $S(t)$ émis par le récepteur soumis au flux transmis par la fente (fig. 1) est périodique de période T, que la fente vibre symétriquement de part et d'autre du bord de plage (courbes en traits pleins) ou non (courbes en pointillés).

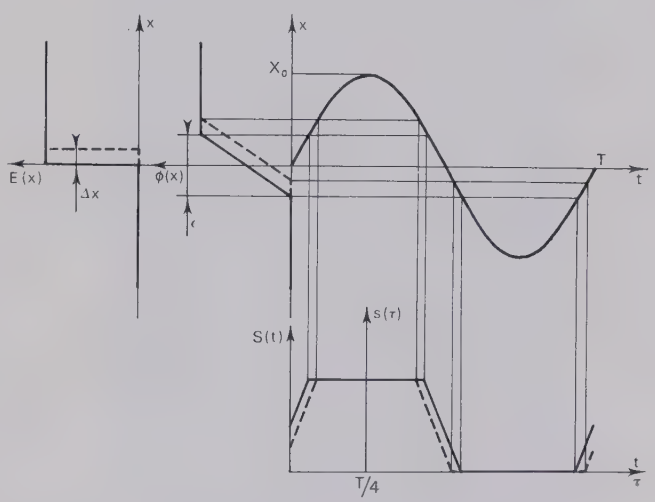

Fig. 1. — *A chaque instant t, le signal photoélectrique S(t) prend une valeur proportionnelle à la valeur du flux lumineux* $\hat{E}(x)$ *transmis par la fente d'abscisse x et de largeur ε balayant le bord de plage représenté par E(x).*

Donc à la différence d'un objet présentant un axe de symétrie [1], un tel pointé ne donne pas naissance à un signal photoélectrique de fréquence fondamentale double de la fréquence de modulation lorsque la fente vibre symétriquement par rapport au bord de plage.

Nous remercions M. S. Slansky qui a calculé les valeurs de $F_n(0)$ et de G_n à l'aide de la CAB 500 de l'Institut d'Optique et M. P. Geleoc qui nous a aidé pour les manipulations et la construction de l'instrument.

On ne peut donc pas pour localiser un objet de ce type employer le test de changement de fréquence fondamentale lors du pointé.

Si l'on pose $\tau = t - (T/4)$, le signal $s(\tau)$ est périodique de période T et est représenté par une fonction paire quel que soit l'écart Δx de l'origine de la vibration par rapport au bord de plage. Il est décomposable en série de Fourier et peut être mis sous la forme

$$s(\tau) = E_0\, \varepsilon l \frac{T}{2\pi X_0}\left(\frac{A_0}{2} + \sum_r A_r \cos\frac{2\pi r\tau}{T}\right),$$

avec

$$A_0 = 1 - \frac{2}{\pi}\frac{\Delta x}{X_0},$$

$$A_r = \frac{2}{r\pi}\,\frac{\sin(r\varepsilon/2X_0)}{r\varepsilon/2X_0}\sin\left(r\frac{\pi}{2} - r\frac{\Delta x}{X_0}\right).$$

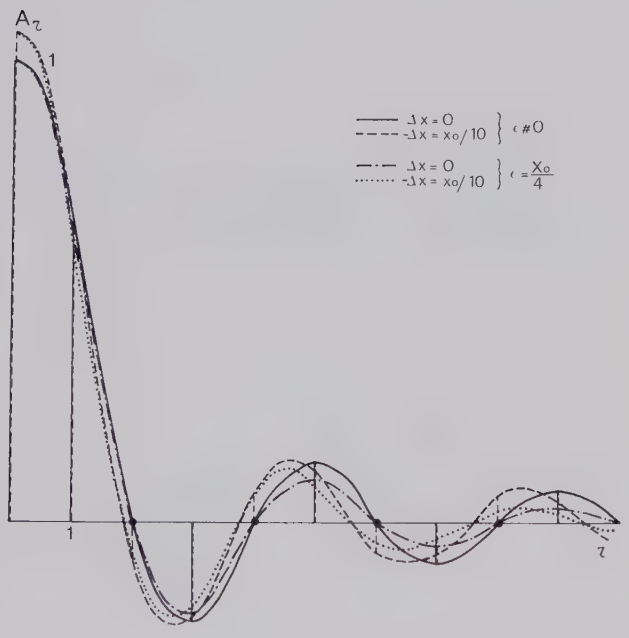

FIG. 2. — *Valeurs des amplitudes des harmoniques du signal photoélectrique en fonction de leur rang.*

Ces valeurs des coefficients (fig. 2) supposent que ε et Δx soient suffisamment faibles devant X_0 pour que les variations du signal $s(\tau)$ entre ses paliers restent linéaires.

Par conséquent dans le cas du bord de plage parfait, si $\Delta x = 0$, c'est-à-dire si la fente vibre symétriquement de part et d'autre de la discontinuité, tous les coefficients pairs A_{2p} s'annulent :

$$\Delta x = 0 \rightarrow A_{2p} = 0\,.$$

Par détection synchrone du signal $s(\tau)$, on décèle la localisation du bord de plage par rapport à la position moyenne de la fente lorsque l'amplitude de sa composante de fréquence double de la fréquence de vibration (ou de toute composante de fréquence égale à un multiple pair de la fréquence de modulation) est nulle.

Si l'on se contente de détecter l'annulation de A_2 et si l'on veut obtenir une précision de localisation $\Delta x/X_0 = 10^{-q}$, les taux de réjection du détecteur synchrone doivent être de 10^{-q} pour le premier harmonique et de 3×10^{-q} pour le troisième harmonique. En effet, $A_2/A_1 \simeq \Delta x/X_0$ et $A_2/A_3 \simeq -3\,\Delta x/X_0$.

Ce qui vient d'être dit se rapporte au bord de plage parfait. Plus généralement, si l'on suppose un bord de plage, ou son image donnée par un instrument d'optique, différent du bord de plage parfait, son balayage sinusoïdal à l'aide d'une fente donne toujours naissance à un signal photoélectrique de la forme

$$s(\tau) = \frac{A_0}{2} + \sum_r A_r \cos\frac{2\pi r\tau}{T}.$$

Si dans certaines conditions d'expériences les amplitudes des harmoniques paires de ce signal s'annulent, c'est-à-dire (l'indice 0 se rapportant à ces conditions d'expériences), si

$$S_0(t) = s_0(\tau) = s_0\left(t - \frac{T}{4}\right)$$

$$= \frac{A_0}{2} + \sum_p A_{2p-1}(-1)^{p-1}\sin(2p-1)\frac{2\pi t}{T}$$

on a alors

$$S_0(t) + S_0(-t) = 2\,S_0(0) = 2\,S_0\left(\frac{T}{2}\right).$$

Le point d'ordonnée $S_0(0)$ est alors le centre de symétrie de la courbe représentative du signal photoélectrique. Les conditions d'expériences vérifiant cette relation et obéissant au test de localisation choisi (annulation des amplitudes des composantes de fréquences paires) sont donc telles que la courbe représentative de $\Phi(x)$ possède un centre de symétrie et que la fente vibre symétriquement de part et d'autre de l'abscisse de ce centre de symétrie.

Nous préférons, en effet, employer cette notion plus générale de centre de symétrie à celle de point d'inflexion [2] afin de tenir compte notamment des branches de fonctions à variation linéaire.

Nous allons maintenant considérer les cas où la localisation du bord de plage par cette méthode est effectuée non pas sur l'objet directement, mais sur son image donnée par un instrument d'optique stigmatique à pupille circulaire en éclairage incohérent ou cohérent.

2. Cas du bord de plage en éclairage incohérent

Dans ce cas la répartition en éclairements dans l'image $E'_i(x)$ est donnée, à un facteur près, par [3]

$$E'_i(x) = E_0 \int_{-\infty}^{Z} \frac{H_1(2\,Z)}{Z^2}\,dZ$$

avec $Z = (2\,\pi x/\lambda)\sin u$, $\sin u$ étant l'ouverture numérique de l'objectif utilisé de grandissement égal à 1, H_1 étant la fonction de Struve d'ordre 1.

Cette image possède un centre de symétrie dont l'abscisse est celle du bord de plage réel. Il en est de même de la fonction $\Phi(x)$ représentant la variation du flux lumineux transmis par la fente :

$$\Phi(x) = l \int_{x-(\varepsilon/2)}^{x+(\varepsilon/2)} E'_i(x)\,dx\,.$$

On peut donc, dans ce cas, localiser l'abscisse du bord de plage réel par annulation des composantes de fréquence paire du signal photoélectrique.

Si l'on considère en première approximation que la répartition en éclairements du bord de plage est

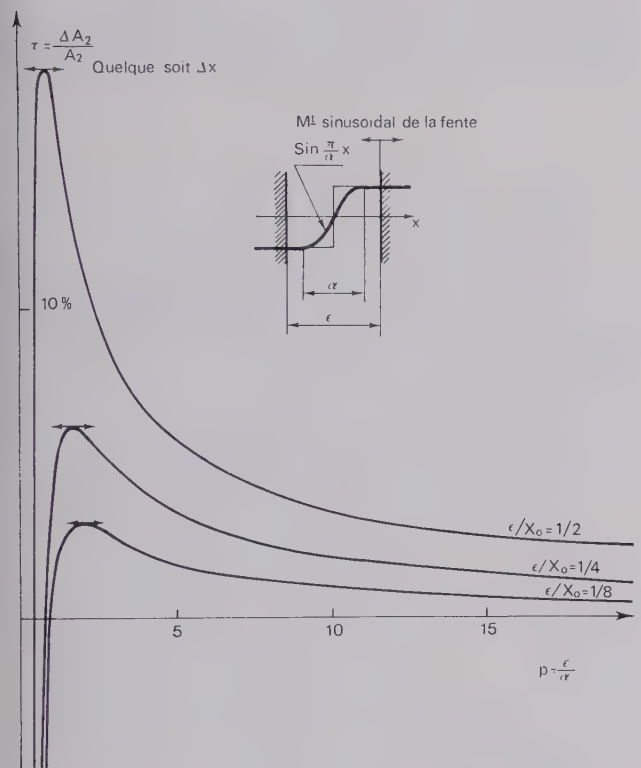

FIG. 3. — *Variation relative par rapport au bord de plage parfait de l'amplitude de la première harmonique paire du signal photoélectrique en fonction de la largeur de fente et de son amplitude de vibration lorsque le bord de plage présente un profil sinusoïdal.*

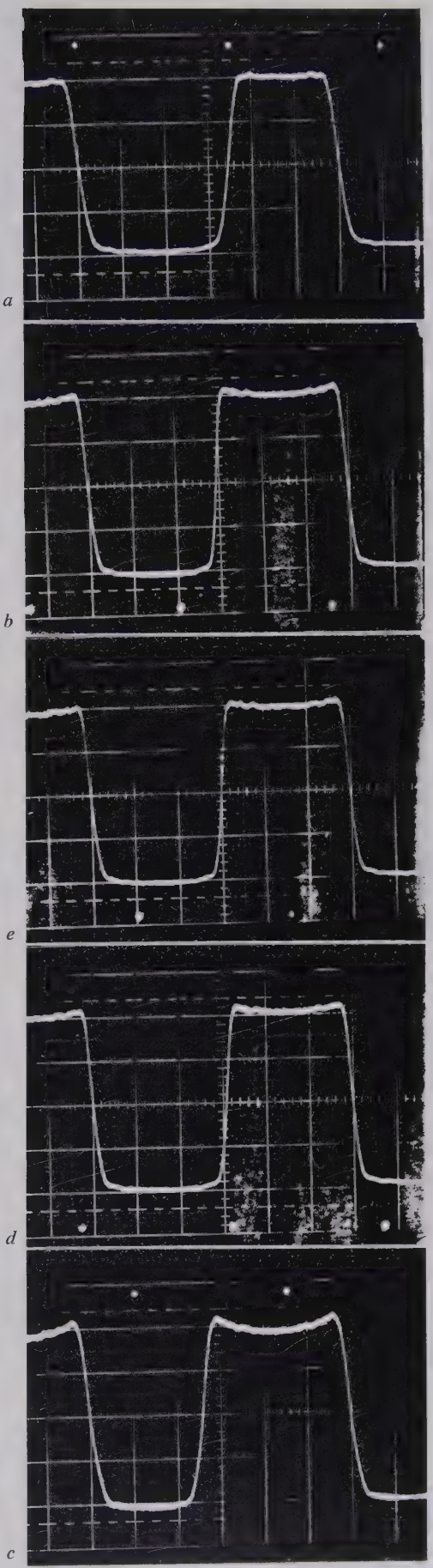

FIG. 4. — *Oscillogrammes du signal photoélectrique obtenu pour la localisation du bord de plage (c) et des écarts de* $\pm$ 0,2 μ *(b et d) et* $\pm$ 2 μ *(a et e) dans le plan de l'objet.*

représentée par deux paliers et une demi-période de sinusoïde, la figure 3 donne la variation relative $\Delta A_2/A_2$ de l'amplitude de la composante de fréquence double de la fréquence de vibration d'un signal dû à un tel bord de plage par rapport à celle d'un signal relatif à un bord de plage parfait. Cette variation est faible, sauf si la largeur de fente est petite par rapport à la « largeur » α du bord de plage. Dans ce cas la sensibilité de la méthode s'accroît.

Nous avons effectué une manipulation en localisant un bord de plage à l'aide d'un microscope [4] muni d'un objectif 60 ×, d'ouverture numérique 0,85, le condenseur étant complètement ouvert. Une fente de largeur 0,07 mm portée par une lame de céramique piézoélectrique [5] vibre à la fréquence de résonance de cette lame ($T = 6\,956$ µs) avec une amplitude

$$X_0 = 0{,}25 \text{ mm}$$

dans le plan de l'image intermédiaire. Le récepteur photoélectrique est un photomultiplicateur 1P21 de RCA. Dans ces conditions d'expérience, la localisation dans le plan de l'objet peut s'effectuer avec une incertitude Δx égale à $\Delta x = (X_0/g_x)\,K$, où K est le taux de réjection du détecteur synchrone pour le premier harmonique et g_x le grandissement de l'objectif utilisé.

Si $X_0 = 0{,}25$ mm, $g_x = 60$,

$\Delta x = 0{,}02$ µ si $K = 5 \times 10^{-3}$ (46 dB),

$\Delta x = 0{,}004$ µ si $K = 10^{-3}$ (60 dB).

La figure 4 représente des oscillogrammes (5 V par division) pour la localisation du bord de plage (*c*) et des écarts de ± 0,2 µ (*b* et *d*) et de ± 2 µ (*a* et *e*) dans le plan de l'objet (+ dans la partie claire − dans la partie sombre).

3. Cas du bord de plage en éclairage cohérent

Dans ce cas la répartition en éclairements dans l'image $E'_c(x)$ est donnée par [3]

$$E'_c(x) = E_0 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Si}(Z)\right]^2 .$$

Or, non seulement la valeur de l'éclairement n'est pas égale à $E_0/2$ au point d'abscisse $x = 0$, mais cette répartition ne présente pas de centre de symétrie (fig. 5).

Si nous effectuons un changement de variable tel que $y = (2\,x \sin u)/\lambda$, ce qui revient à exprimer l'unité de longueur en unités optiques $\lambda/2 \sin u$, nous obtenons

$$\Phi(y) = l \int_{y-(n/2)}^{y+(n/2)} E'_c(y)\,\mathrm{d}y$$

$$= l \int_{y-(n/2)}^{y+(n/2)} \left[\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{Si}(\pi y)}{\pi}\right]^2 \mathrm{d}y .$$

Si la largeur de fente ε est telle que $\varepsilon = n\lambda/2 \sin u$ on peut comparer sur la figure 5 les courbes normalisées $F_n(y) = \Phi_n(y)/n$ pour plusieurs valeurs de n, l étant égal à 1. Ces courbes ont été obtenues en calculant pour chaque point les sommes

$$F_n(y) = \frac{1}{10\,n} \sum_{k=0}^{k=10n-1} \frac{1}{2} \left[E\left(y - \frac{n}{2} + \frac{k}{10}\right) + E\left(y - \frac{n}{2} + \frac{k+1}{10}\right)\right].$$

La figure 6 donne en fonction de n les valeurs $F_n(0)$, ordonnée des courbes $F_n(y)$ au point $y = 0$. Cette courbe représente la valeur normalisée de l'énergie transmise par la fente de largeur normalisée n, centrée sur l'abscisse du bord de plage réel.

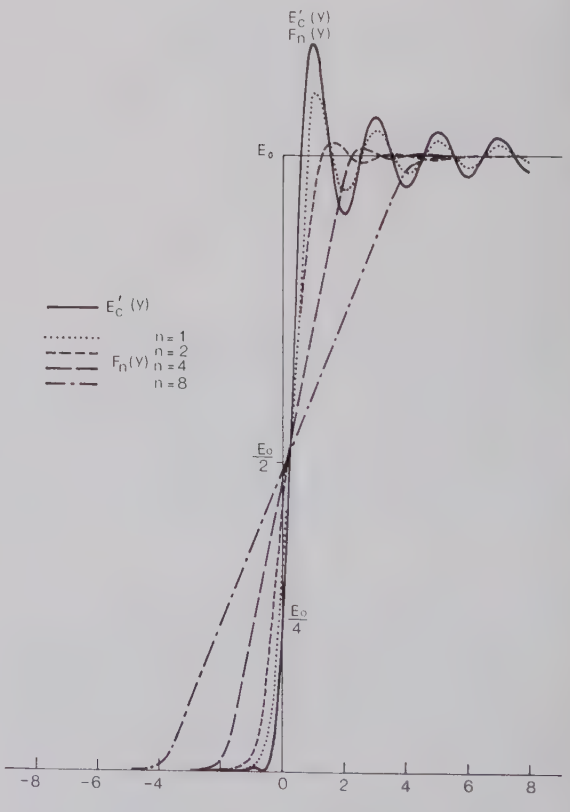

FIG. 5. — *Valeurs normalisées du flux lumineux transmis par une fente de différentes largeurs balayant un bord de plage en éclairage cohérent en fonction de l'abscisse de la fente.*

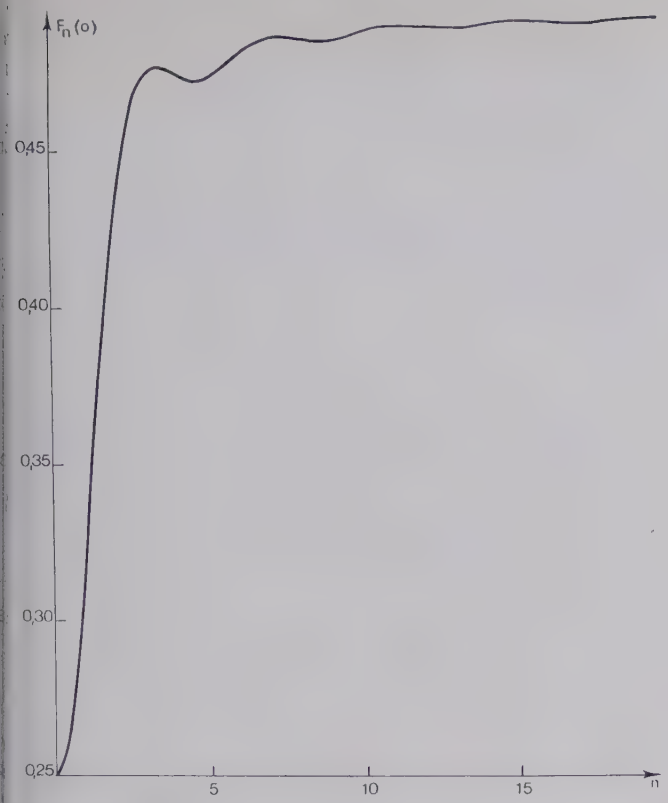

FIG. 6. — *Valeurs normalisées du flux lumineux transmis par une fente centrée sur l'abscisse du bord de plage vrai en fonction de la largeur de fente.*

Les figures 5 et 6 montrent que la courbe représentative de l'énergie transmise par la fente n'a pour ordonnée la demi-somme des énergies maximale et minimale en un point ayant l'abscisse du bord de plage réel que lorsque la largeur de fente devient infiniment grande. D'autre part, les courbes $\Phi(y)$ [ou $F(y)$] présentent des modulations dues aux modulations de la courbe $E'(y)$. Dans la méthode de pointé considérée, l'amplitude de vibration X_0 de la fente doit être choisie de telle sorte que la partie utilisée de la courbe $\Phi(y)$ donnant naissance au signal $S(t)$ ne présente pas de modulations afin qu'en première approximation il soit possible d'y définir un centre de symétrie d'abscisse G. La figure 7 donne les valeurs maximales de X_0 (exprimées en unités optiques m) en fonction de la largeur de fente ε (exprimée en unités optiques n) afin que cette condition soit réalisée. Pratiquement, à partir de $n = 10$, l'amplitude de vibration X_0 peut être quelconque, les modulations résiduelles de $\Phi_n(y)$ étant négligeables. Si cette condition sur la valeur de l'amplitude est réalisée, la figure 8 donne les valeurs de $F_n(G)$ en fonction de n, $F_n(G)$ étant la demi-somme des valeurs maximale et minimale de $F_n(y)$ dans le domaine utilisé de la courbe.

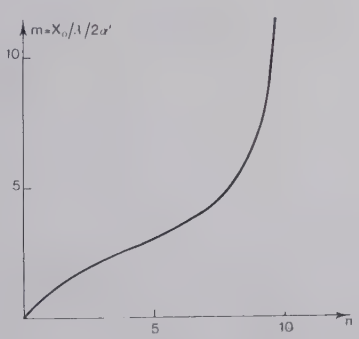

FIG. 7. — *Variation de l'amplitude de vibration de la fente en fonction de sa largeur pour qu'en première approximation la variation du flux lumineux transmis par la fente en fonction de son abscisse présente un centre de symétrie.*

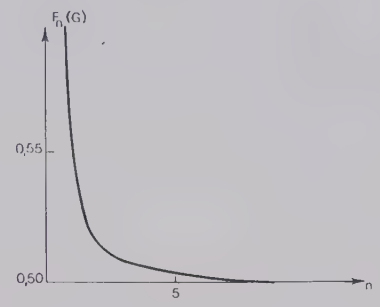

FIG. 8. — *Valeurs normalisées du flux lumineux transmis par la fente centrée sur l'abscisse du centre de symétrie répondant aux conditions de la figure 7 en fonction de la largeur de fente.*

Par la méthode utilisée, c'est le point d'abscisse G qui est localisé et l'on commet une erreur systématique. Suivant la largeur de fente n elle prend pour valeur :

$$G_n = \frac{\Phi_n(G) - \Phi_n(0)}{\Phi_n^{(1)}(0)} = \frac{n[F_n(G) - F_n(0)]}{\Phi_n^{(1)}(0)},$$

$\Phi_n^{(1)}(0)$ étant la première dérivée de $\Phi_n(y)$ au point $y = 0$.

Or, à la constante l près, $\Phi_n(0) = \int_{-n/2}^{n/2} E(y)\,dy$ soit, à la constante E_0 près,

$$\Phi_n(0) = \int_{-n/2}^{+n/2} \left[\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{Si}(\pi y)}{\pi}\right]^2 dy$$

$$= \frac{n}{4} + \frac{2}{\pi^2}\int_0^{n/2} \mathrm{Si}^2(\pi y)\,dy$$

$$= n\left\{\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^3}\left[\mathrm{Si}^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{4}{n}\cos\frac{n\pi}{2}\,\mathrm{Si}\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{2}{n}\mathrm{Si}(n\pi)\right]\right\} = nF_n(0).$$

D'autre part, aux mêmes constantes près,

$$\Phi_n^{(1)}(0) = E\left(\frac{n}{2}\right) - E\left(-\frac{n}{2}\right) = \frac{2}{\pi}\,\mathrm{Si}\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

La figure 9 donne les valeurs de G_n en fonction de n en prenant $F_n(G) = 0{,}50$ (courbe en trait plein) et en tenant compte des corrections de la valeur de $F_n(G)$ données sur la figure 8 pour les faibles valeurs de n (courbe en pointillé).

Lorsque n croît, G_n tend suivant une fonction oscillante vers la valeur $1/\pi^2$ et la variation de n n'a que peu d'influence sur la variation de l'erreur systématique G_n. Cette erreur sur la localisation du bord de plage par l'intermédiaire de son image fournie par un instrument d'optique en éclairage cohérent se produit toujours dans le même sens (du côté clair du bord de plage). Ce phénomène doit être souligné si la méthode est utilisée pour mesurer la largeur d'un trait. Dans ce cas la largeur mesurée doit être augmentée du double de cette erreur systématique. Celle-ci est donnée par

$$\Delta x = G_n \frac{\lambda}{2 \sin u} \to \frac{1}{\pi^2} \frac{\lambda}{2 \sin u}$$

si n croît.

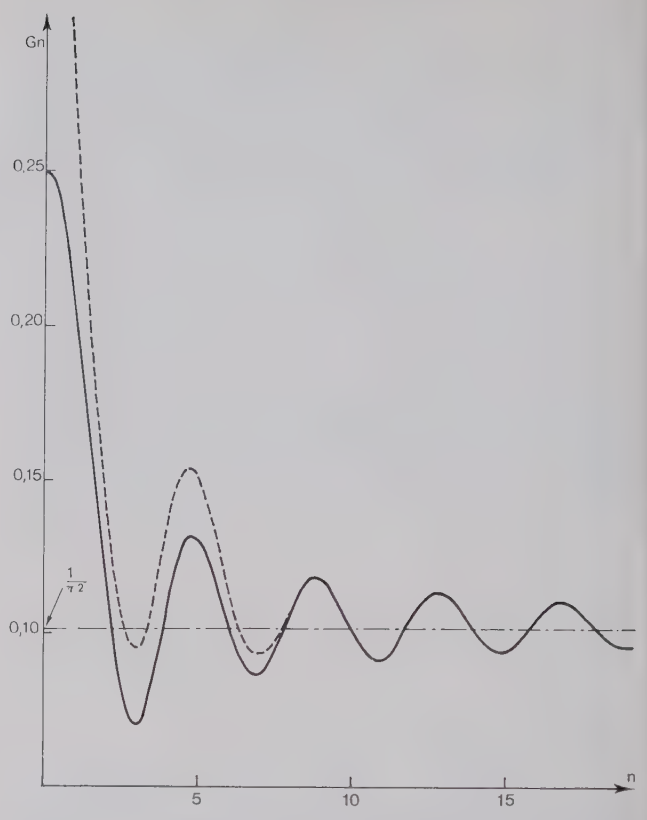

FIG. 9. — *Variation de l'erreur systématique existant sur la localisation du bord de plage en éclairage cohérent en fonction de la largeur de fente.*

CONCLUSIONS

La localisation d'un bord de plage est possible par détection synchrone du signal photoélectrique modulé émis par un récepteur soumis au flux lumineux traversant une fente vibrant sinusoïdalement dans le plan du bord de plage ou de son image. Par annulation des amplitudes des composantes de fréquence paire de ce signal on détermine l'abscisse du centre de symétrie de la répartition spatiale de ce flux. Cette abscisse est la même que celle du bord de plage dans le cas de l'éclairage incohérent et la précision de localisation est liée aux performances de la chaîne de détection synchrone et par là même à la définition du signal photoélectrique (rapport signal/bruit notamment). Dans le cas de l'éclairage cohérent, en respectant certaines conditions sur les valeurs de la largeur de fente et de son amplitude de vibration, la méthode est également applicable, mais la localisation s'effectue avec une erreur systématique de l'ordre du vingtième de la limite de résolution du système optique.

Manuscrit reçu le 10 juillet 1969.

BIBLIOGRAPHIE

[1] NOMARSKI (G.) et ROBLIN (G.). — *C. r. Ac. Sc.*, t. **261**, 1965, p. 3556 ; M^lle GROS (N.) et ROBLIN (G.). — *Rev. Opt.*, t. **46**, 1967, p. 249.

[2] GIACOMO (P.) et JACQUINOT (P.). — *Jl Phys.* [8], t. **13**, 1952, p. 59A.

[3] MARÉCHAL (A.) et FRANÇON (M.). — Diffraction, structure des images, éd. *Rev. Opt.*, Paris, 1960.

[4] NOMARSKI (G.) et ROBLIN (G.). — Catalogue 61 Exposition Sté Fr. Phys., 1967, p. 68.

[5] NOMARSKI (G.), ROBLIN (G.) et Centre Nat. Rech. Sci., *BF* **1 449 820** du 5 juillet 1965.

Nouv. Rev. d'Optique appliquée, 1971, **2**, n° 2, pp. 105-113

Laboratoire de Microscopie Optique de l'Institut d'Optique Théorique et Appliquée
(Directeur G. Nomarski)
3-5, Boulevard Pasteur — F 75-Paris (15e)

LOCALISATION LONGITUDINALE DES SURFACES PAR INTERFÉROMÉTRIE A MODULATION DE PHASE

par

G. NOMARSKI et G. ROBLIN

INTRODUCTION

On s'intéresse à un procédé permettant la localisation longitudinale d'une surface plane réfléchissant spéculairement. Une telle méthode rencontre de nombreuses applications tant au laboratoire que dans l'industrie, qu'il s'agisse d'effectuer automatiquement la mise au point d'un microscope ou d'un viseur optique dans un plan perpendiculaire à l'axe optique, d'enregistrer le profil d'une surface, ou plus simplement de mesurer une cote entre deux plans parallèles.

De telles opérations nécessitent l'emploi d'un palpeur mécanique, électrique ou optique. Les palpeurs mécaniques entrent en contact avec la pièce et peuvent entraîner une déformation de cette dernière. La pression à exercer et le rayon de courbure du palpeur doivent être choisis en fonction de la dureté du matériau et de sa rugosité. Les palpeurs électriques à variation capacitive ou selfique nécessitent également dans la plupart des cas l'usage intermédiaire d'un palpeur mécanique.

Par contre les palpeurs optiques offrent l'avantage de n'employer aucun contact matériel et peuvent travailler sur des éléments d'aire variable et de rugosité variable.

La méthode la plus usuelle consiste à localiser une surface par pointé par absence de parallaxe à l'aide d'un instrument visuel [1]. D'autres méthodes consistent soit à utiliser les variations de l'éclairement d'une tache de diffraction dues aux variations de la répartition des amplitudes sur la pupille de l'instrument [2], soit à égaliser le contraste de deux mires situées symétriquement de part et d'autre du plan de mise au point visuellement [3] et photoélectriquement [4, 5] ou à comparer les éclairements de deux sources placées également de part et d'autre du plan de mise au point [6], soit à appliquer la méthode du couteau de Foucault entraînant une égalisation photométrique dans le plan de la pupille [7].

L'on sait que pour des objectifs de type microscope ou viseur, c'est-à-dire aplanétiques, pour une ouverture numérique au maximum de l'ordre de 0,50, un défaut de mise au point dz le long de l'axe optique dans l'espace objet entraîne une variation de chemin optique aberrant

$$\Delta = dz(1 - \cos U_0) = dz' \frac{U_0'^2}{2}$$

au bord de la pupille, U_0 et U'_0 étant respectivement les angles d'ouverture objet et image de l'objectif (fig. 1).

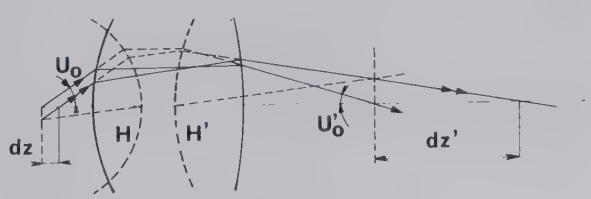

Fig. 1. — *Système optique HH' en présence d'un défaut de mise au point* dz.

Un défaut de mise au point peut donc être mis en évidence aussi bien à partir des variations de dz' au niveau du plan de la meilleure image que des

variations de Δ, c'est-à-dire des déformations de la surface d'onde, au niveau du plan de la pupille de l'objectif.

La méthode que nous allons développer ici permet d'effectuer des pointés longitudinaux par l'exploitation des déformations de la surface d'onde au niveau de la pupille. Ces déformations sont mises en évidence par le profil différencié de la surface d'onde obtenu par interférences entre deux surfaces d'onde résultant du dédoublement de la pupille.

Nous décrirons successivement l'interféromètre permettant de mettre en évidence les déformations de la surface d'onde, l'application qui peut être faite de la détection de ces déformations à une méthode de pointé longitudinal, enfin la sensibilité et les premiers résultats obtenus par cette méthode.

I. — L'INTERFÉROMÈTRE DIFFÉRENTIEL

Il s'agit d'un interféromètre à polarisation utilisé pour l'étude des aberrations des objectifs de microscope [8]. L'objectif étudié O (fig. 2) est contrôlé par autocollimation à l'aide d'un miroir M placé dans le plan de l'objet. La source S est projetée sur un prisme de Wollaston W, duplicateur d'ondes biréfringent, fournissant un dédoublement angulaire ε de la pupille

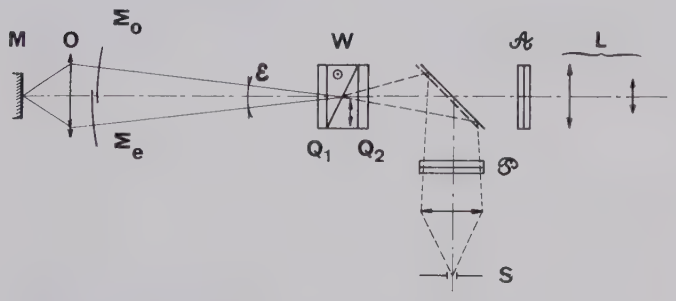

FIG. 2. — *L'objectif O mis au point sur le miroir M est contrôlé par interférométrie entre les deux surfaces d'onde ordinaire Σ_0 et extraordinaire Σ_e obtenues par dédoublement de la pupille à l'aide d'un duplicateur biréfringent W conjugué de M.*

de l'objectif. Il dédouble donc la surface d'onde émergente en deux surfaces d'onde ordinaire Σ_0 et extraordinaire Σ_e. Le Wollaston étant placé entre deux polariseurs croisés, il est possible de faire interférer ces deux ondes et ainsi d'obtenir un interférogramme localisé dans le plan de la pupille fournissant les lignes équiphases du profil différencié de la surface d'onde. Cet interférogramme est observé à l'aide de la lunette L.

Le prisme W, conjugué du plan du miroir M par rapport à l'objectif est donc conjugué de lui-même avec un grandissement égal à + 1. Afin d'une part de travailler en lumière blanche, d'autre part d'utiliser un champ fini, ce qui augmente l'étendue géométrique du faisceau, donc le flux lumineux, il est nécessaire de compenser le déphasage dû à la biréfringence du prisme en tout point du prisme, déphasage proportionnel à la distance du point au centre. Il faut donc d'une part tourner le plan de polarisation de 90° afin d'inverser le rôle des composantes ordinaire et extraordinaire de chaque rayon en plaçant une lame quart d'onde Q_1 à 45° des axes de Wollaston, d'autre part utiliser un Wollaston dont le plan de localisation des franges soit perpendiculaire à l'axe optique (fig. 3).

Dans le cas des objectifs de microscope, la pupille d'entrée étant à l'infini, la pupille de sortie est dans le

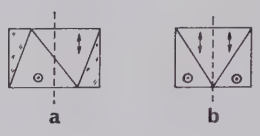

FIG. 3. — *Prismes de Wollaston dont le plan de localisation des franges propres est perpendiculaire à l'axe optique* : a) *Wollaston incliné monté entre deux prismes de verre* ; b) *Wollaston à trois éléments.*

plan focal arrière et ainsi par autocollimation sur le miroir M, elle est conjuguée d'elle-même avec le grandissement − 1. Ainsi, si $p(u, v)$ représente l'amplitude complexe dans le plan de la pupille considérée comme objet de phase, par autocollimation on observe en réalité une pupille fictive dont la répartition en amplitude est donnée par :

$$\bar{p}(u, v) = p(u, v).p(-u, -v) .$$

Par conséquent on étudie une surface d'onde fictive entachée du double des aberrations paires de la pupille réelle : aberration sphérique, astigmatisme et défaut de mise au point, mais qui n'apporte aucune information sur les aberrations impaires telles la coma et la distorsion.

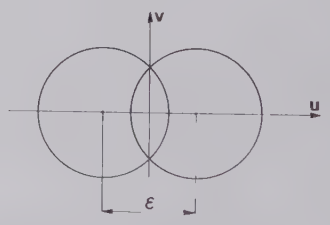

FIG. 4. — *Dédoublement d'une pupille circulaire dans son plan à l'aide d'un duplicateur d'ondes de dédoublement angulaire ε.*

La pupille étant dédoublée d'une quantité angulaire ε (fig. 4) si l'interféromètre est placé entre polariseurs croisés, l'amplitude complexe dans la zone commune aux pupilles fictives dédoublées sera représentée par :

$$A(u, v) = \bar{p}\left(u + \frac{\varepsilon}{2}, v\right) - \bar{p}\left(u - \frac{\varepsilon}{2}, v\right)$$

$$= \frac{1}{2} \exp\left[jk\,\bar{\Delta}\left(u + \frac{\varepsilon}{2}, v\right)\right] -$$

$$- \exp\left[jk\,\bar{\Delta}\left(u + \frac{\varepsilon}{2}, v\right)\right]$$

où u et v sont des variables angulaires et $k = 2\pi/\lambda$.

L'intensité de l'interférogramme est de la forme :

$$I(u, v) = \frac{1}{2}\left\{1 - \cos k\left[\bar{\Delta}\left(u + \frac{\varepsilon}{2}, v\right) - \bar{\Delta}\left(u - \frac{\varepsilon}{2}, v\right)\right]\right\}.$$

Cet interférogramme rend compte de la qualité de l'objectif pour la fréquence spatiale $\varepsilon/2$ dans la direction de dédoublement du duplicateur d'ondes biréfringent. Si l'on emploie deux récepteurs C_1 et C_2 (fig. 5) recevant respectivement les flux lumineux

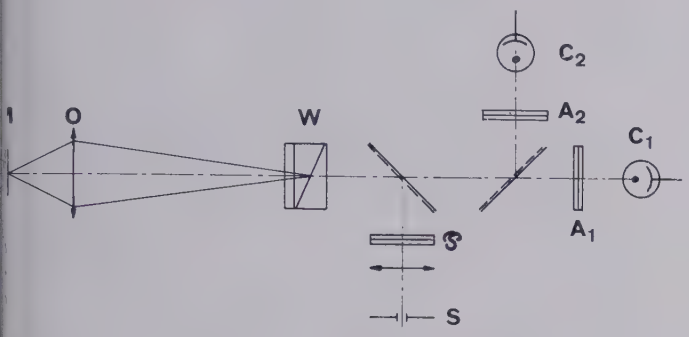

FIG. 5. — *Emplois de deux récepteurs soumis aux interférogrammes additif et soustractif. La différence entre les deux signaux est proportionnelle à la fonction de transfert.*

produits par les phénomènes d'interférences additives et soustractives (les analyseurs A_1 et A_2 étant respectivement parallèle et perpendiculaire au polariseur), la différence entre les deux signaux photoélectriques est proportionnelle au facteur de transfert de l'objectif à la fréquence $\varepsilon/2$.

L'adjonction d'une deuxième lame quart d'onde Q_2 également orientée à 45° permet de modifier la direction du dédoublement par rotation du Wollaston, l'emploi d'un diasporamètre biréfringent composé de deux prismes localisant leurs franges dans un plan commun (fig. 6) permet de faire varier le dédoublement.

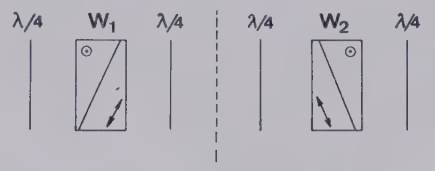

FIG. 6. — *Diasporamètre biréfringent composé de deux Wollaston. Si ψ est l'angle des deux Wollaston autour de l'axe optique, et ε l'angle de dédoublement d'un Wollaston, le dédoublement obtenu est $\varepsilon(\psi) = 2\,\varepsilon \sin \psi/2$. Les Wollaston ont un axe incliné (système dû à G. Nomarski) de façon à localiser leurs franges dans un plan extérieur.*

II. — APPLICATION DE L'INTERFÉROMÈTRE AUX POINTÉS LONGITUDINAUX

L'interféromètre qui vient d'être décrit crée donc dans le plan de la pupille de l'objectif un interférogramme mettant en évidence les aberrations de l'objectif. Supposons un objectif parfait, dénué de toute aberration, lorsqu'il est au point dans le plan correspondant à sa bonne distance de correction, apparaît une teinte plate sombre dans la zone commune du dédoublement (fig. 7*a*). Par contre un défaut de mise au point dz dans l'espace objet entraînant un défaut de mise au point dz' dans l'espace image crée pour un angle d'ouverture U_0 une différence de marche aberrante

$$\Delta(U_0) = dz(1 - \cos U_0) = dz' \frac{U_0'^2}{2}$$

or comme $\bar{\Delta}(u, v) = \Delta(u, v) + \Delta(-u, -v) = 2\,\Delta(u, v)$ la répartition en intensité de l'interférogramme est donnée par :

$$I(u, v) = \frac{1}{2}\left\{1 - \cos k\, dz'\left[\left(u + \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + v^2 - \left(u - \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 - v^2\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{1 - \cos 2k\, dz'\, \varepsilon u\right\}.$$

On a donc un système de franges rectilignes à deux ondes (fig. 7*b*) perpendiculaires à la direction du dédoublement, dont le pas est proportionnel au dédoublement et au défaut de mise au point.

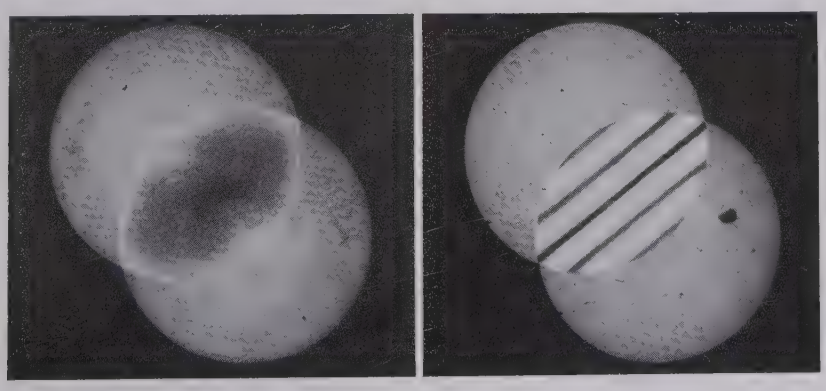

FIG. 7. — a) *Interférogramme dans le plan de la pupille pour la bonne mise au point.* b) *Interférogramme dans le plan de la pupille pour un défaut de mise au point.*

Ces photographies sont extraites du rapport de stage de DEA de M. Ferray : « Contrôle interférométrique de la qualité optique d'un microscope », juillet 1969.

Cet interférogramme est identique pour des défauts de mise au point symétriques de part et d'autre du plan de mise au point, ce qui est conforme au fait qu'il en est de même de la fonction de transfert. C'est ce phénomène qui est utilisé par certains auteurs précédemment cités [2, 3].

Les variations de phase en un point quelconque de la zone commune du dédoublement sont donc proportionnelles aux variations de défaut de mise au point et la détection de cette phase peut constituer une méthode pour mesurer un défaut de mise au point en grandeur et en signe.

Remarquons au passage que si l'on emploie un réticule interférentiel constitué d'un prisme de Wollaston conjugué du plan de la pupille et orienté perpendiculairement à l'interféromètre (fig. 8), les lignes équiphases ont pour équation :

$$\varphi(u, v) = 2\, p\pi$$

or

$$\varphi(u, v) = \varphi(u) + \varphi(v) = \frac{4\pi}{\lambda} \mathrm{d}z'\, \varepsilon u + \frac{2\pi v}{i}$$

où i est l'interfrange angulaire du réticule interférentiel. L'équation des franges est donc :

$$v = -\frac{2\, i\varepsilon}{\lambda} \mathrm{d}z'\, u + pi\,.$$

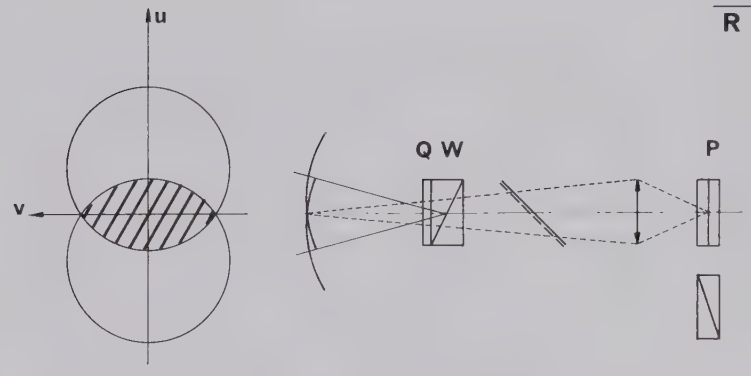

FIG. 8. — *Emploi d'un réticule interférentiel dont les franges sont localisées dans le plan de la pupille. En présence d'un défaut de mise au point les franges s'inclinent suivant une pente proportionnelle au défaut de mise au point.*

Ce sont des franges rectilignes inclinées, dont la pente varie linéairement avec le défaut de mise au point. La mesure de l'angle de rotation des franges, ou leur comptage en un point nous informe sur les variations du défaut de mise au point.

Revenons à l'instrument de base non muni de ce réticule et à l'identité en intensité des interférogrammes pour des défauts de mise au point symétriques de part et d'autre du plan de meilleure mise au point.

Dans ce cas les flux lumineux transmis par la zone commune du dédoublement sont égaux et il en est de même des courants photoélectriques fournis par un récepteur soumis à ces flux.

Par conséquent si l'on module le défaut de mise au point, par exemple en modulant la longueur de tube de l'instrument, les variations de flux étant symétriques par rapport à la mise au point parfaite, il en sera de même du signal photoélectrique, si l'origine temporelle de la modulation est confondue avec l'instant de passage à la mise au point parfaite. Au contraire, il y aura dissymétrie du signal photoélectrique, donc apparition d'un signal d'erreur, lorsqu'un défaut de mise au point fixe, parasite ou à mesurer, s'ajoute au défaut de mise au point modulé [9].

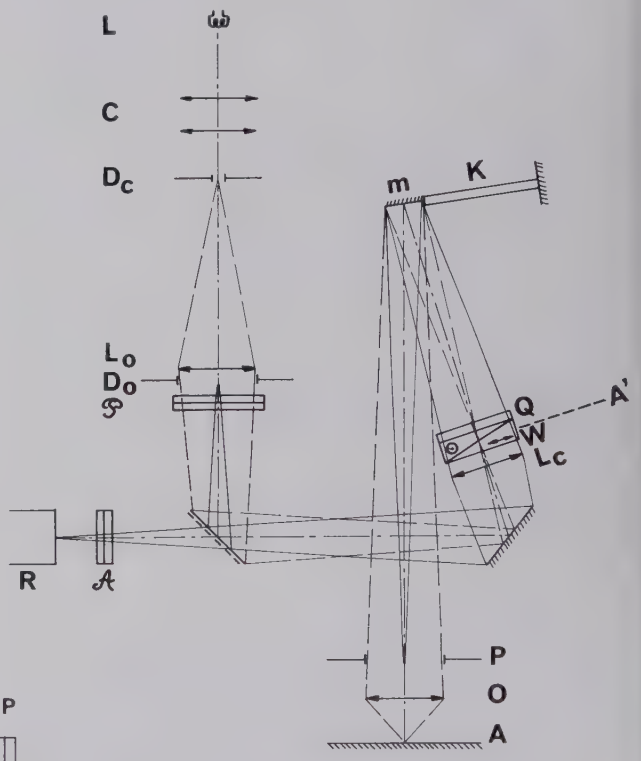

FIG. 9. — *Le miroir m solidaire de la céramique K animée d'un mouvement oscillant sinusoïdal permet, en modulant la longueur de tube de l'instrument, de moduler la phase en tout point de la zone commune du dédoublement.*

La figure 9 montre un exemple de réalisation possible. Dans le plan de l'image intermédiaire A' de l'objectif O est placé un prisme de Wollaston W adjoint à une lame quart d'onde Q orientée à 45° des axes du Wollaston. Entre la pupille de sortie P de l'objectif et l'image intermédiaire A' est placé un miroir plan m servant à moduler la longueur de tube de l'appareil. Pour cela, il est animé d'un mouvement oscillant sinusoïdal d'amplitude X'_0 (ce qui correspond à une amplitude de modulation du défaut de mise au point $\mathrm{d}z'_0 = 2\, X'_0$) et de fréquence $f = 2\,\pi/T$. Ce mouvement est produit en rendant le miroir m solidaire d'une lame de céramique polycristalline piézoélectrique K encastrée à l'une de ses extrémités. Les qualités et la mise en œuvre de ce modulateur ont été expérimentées à l'occasion d'autres expériences de localisation latérale [10] ou angulaire [11]. La lumière issue de la source L éclaire grâce au condenseur C un diaphragme de champ D_c et un diaphragme d'ouverture D_0 res-

pectivement conjugués de A' et de P. Cette lumière est polarisée par un polariseur $\mathcal{P}$ orienté à 45° des axes du Wollaston. Après réflexion sur le miroir plan placé dans le plan de l'objet A et traversée de l'analyseur $\mathcal{A}$ croisé avec le polariseur, le faisceau atteint la surface sensible du photorécepteur R conjuguée de la pupille de l'instrument.

Les photographies de la figure 10 montrent le prototype de l'appareil présenté à l'Exposition MESUCORA 1970.

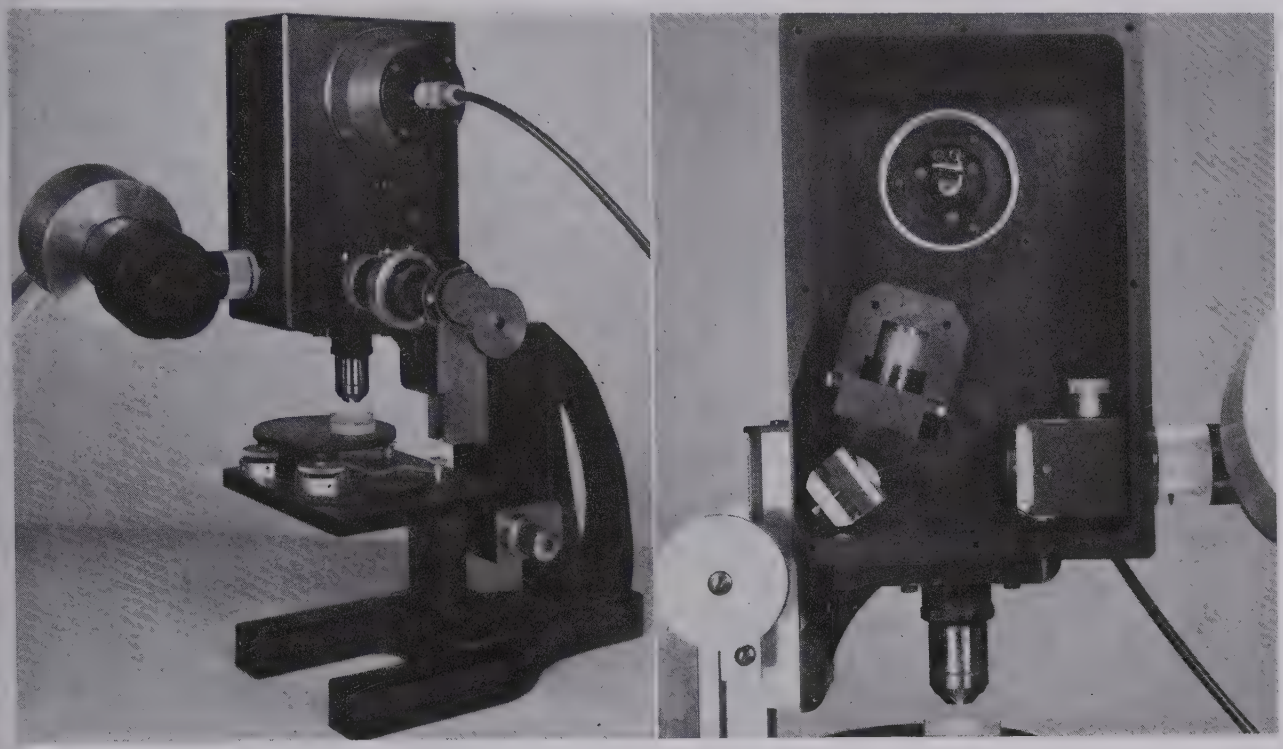

FIG. 10. — a) *Vue extérieure du prototype de capteur photoélectrique de pointés longitudinaux.*
b) *Vue intérieure du prototype.*

III. — SENSIBILITÉ DE LA MÉTHODE

Outre le choix de l'ouverture numérique de l'objectif utilisé, les performances de cette méthode de pointé longitudinal dépendent des deux paramètres que sont le dédoublement de l'interféromètre et l'amplitude de modulation du défaut de mise au point.

Pour étudier l'influence de ces deux paramètres sur la sensibilité de la méthode, nous nous placerons dans le cas d'une hypothèse expérimentale simplificatrice. Nous supposerons que l'on isole une petite plage sans dimension au bord de la zone commune dans la direction du dédoublement (fig. 11).

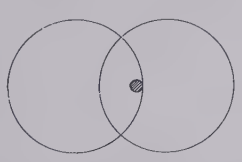

FIG. 11. — *Hypothèse expérimentale simplificatrice où le récepteur est seulement soumis au flux transmis par une petite zone isolée au bord de la zone commune.*

En ce qui concerne le dédoublement, nous cherchons à ce que pour une amplitude de modulation du défaut de mise au point dz_0 donnée, on obtienne une variation du chemin optique aberrant maximale au bord de la zone commune, ce qui entraîne sur le signal photoélectrique un taux de modulation maximal. Soit ε l'angle de dédoublement du duplicateur biréfringent et U'_0 l'angle d'ouverture de l'objectif dans l'espace image (fig. 12). Au bord de la zone commune la différence de chemin optique aberrant est :

$$\bar{\Delta}_0 \doteq \bar{\Delta}(U'_0) - \bar{\Delta}(U'_0 - \varepsilon).$$

Les angles étant faibles :

$$\bar{\Delta}_0 = dz'_0[U'^2_0 - (U'_0 - \varepsilon)^2] = dz'_0(2\,U'_0\,\varepsilon - \varepsilon^2)\,.$$

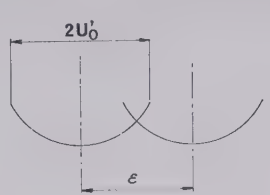

FIG. 12. — *Vue latérale du dédoublement de la pupille.*

L'amplitude de modulation de la variation de chemin optique aberrant au bord de la zone commune

est donc maximale pour un angle de dédoublement ε_0 égal à l'angle d'ouverture image de l'objectif U_0.

Dans ce cas $\bar{\Delta}_0 = \mathrm{d}z'_0\, U'^2_0$ et l'amplitude de modulation de la variation de chemin optique aberrant $\Delta_0 = \bar{\Delta}_0/2 = \mathrm{d}z'_0\, U'^2_0/2$ est égale à la variation de chemin optique aberrant entre le bord de la pupille et son centre. Dans ce cas la phase $\bar{\varphi}_0$ dans la zone isolée est directement proportionnelle au défaut de mise au point et la mesure de cette phase, par exemple à l'aide d'un compensateur de Sénarmont, permet une mesure linéaire du défaut de mise au point.

Etudions maintenant l'influence de l'amplitude de modulation du défaut de mise au point sur la sensibilité de la méthode. Soit $\bar{\varphi}$ la phase à l'intérieur de la zone isolée. Entre polariseurs croisés l'intensité lumineuse s'écrit :

$$I(\bar{\varphi}) = I_0 \left| \frac{1}{2} - \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}}{2} \right|^2 = \frac{I_0}{2}(1 - \cos\bar{\varphi}) .$$

Soit $I(\varphi) = I_0 \sin^2\varphi$ puisque $\bar{\varphi} = 2\,\varphi$.

Une variation $\delta\varphi$ sur φ produit en ce point une intensité :

$$I(\varphi + \delta\varphi) = I_0 \sin^2(\varphi + \delta\varphi) \# I(\varphi) + \\ + I_0\, \delta\varphi \sin 2\,\varphi .$$

Or du fait de la modulation du défaut de mise au point $\mathrm{d}z$:

$$\mathrm{d}z(t) = \mathrm{d}z_0 \sin\frac{2\,\pi t}{T}$$

$$\Delta(t) = \Delta_0 \sin\frac{2\,\pi t}{T}$$

$$\varphi(t) = \varphi_0 \sin\frac{2\,\pi t}{T} .$$

Lorsque l'origine temporelle de la modulation est confondue avec l'instant de passage à la mise au point parfaite, le signal photoélectrique est de la forme :

$$S_0(t) = \frac{I_0}{2}\left[1 - \cos 2\,\varphi(t)\right] =$$

$$= \frac{I_0}{2}\left[1 - J_0(2\,\varphi_0) + 2\sum_p J_{2p}(2\,\varphi_0)\cos 2\,p\,\frac{2\,\pi t}{T}\right].$$

Par contre en présence d'un défaut de mise au point $\delta\mathrm{d}z$ entraînant dans la plage d'observation considérée une variation de phase $\delta\varphi$, il apparaît (fig. 13) une variation du signal photo-électrique :

$$\delta S(t) = I_0\, \delta\varphi \sin 2\,\varphi(t)$$

$$= 2\, I_0\, \delta\varphi \sum_p J_{2p-1}(2\,\varphi_0) \sin(2\,p - 1)\frac{2\,\pi t}{T} .$$

La manipulation consiste donc pour localiser une surface à détecter le minimum d'amplitude des harmoniques impaires, ou d'une harmonique impaire particulière ; pour mesurer « optiquement » un défaut de mise au point à effectuer la compensation de la variation de phase jusqu'à obtenir un tel minimum ; pour le mesurer « électriquement » à mesurer l'amplitude de l'une de ces composantes. Ces manipulations s'effectuent à l'aide d'un amplificateur à détection synchrone. Considérons par exemple l'amplitude de la première harmonique :

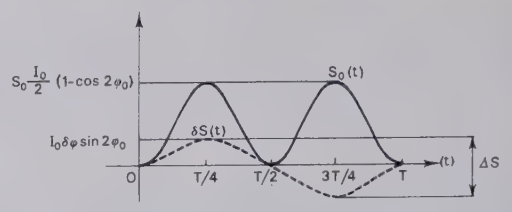

FIG. 13. — *Variations en fonction du temps du signal photoélectrique pour la mise au point parfaite (trait plein) et du signal d'erreur dû à un défaut de mise au point (trait tirets).*

$$A_1 = 2\, I_0\, \delta\varphi J_1(2\,\varphi_0)$$

le fond continu du signal étant égal à

$$\frac{I_0}{2}\left[1 - J_0(2\,\varphi_0)\right],$$

pour avoir la meilleure sensibilité, il est utile que l'amplitude de la composante de la première harmonique A_1 soit suffisamment grande par rapport au bruitdu signal B_0 au niveau du signal moyen, soit si l'on considère que le bruit de type Schottky est prépondérant, que

$$\frac{A_1}{B_0} \simeq \frac{J_1(2\,\varphi_0)}{\sqrt{1 - J_0(2\,\varphi_0)}}$$

soit maximal.

Les valeurs de φ_0 remplissant cette condition sont telles qu'elles annulent à la fois le signal moyen et par conséquent la profondeur de modulation

$$S_0 = \frac{I_0}{2}(1 - \cos 2\,\varphi_0) .$$

On choisit donc pour valeur de l'amplitude de modulation de la phase φ_0 au bord de la zone commune du dédoublement $\varphi_0 = \pi/4$ qui constitue un compromis tel que (fig. 14) :

1) Le *signal moyen* soit assez grand (le tiers du maximum possible).
2) La *profondeur de modulation* soit assez grande (la moitié du maximum possible).
3) Le *rapport* A_1/B_0 soit assez grand (0,8 fois le maximum possible).

Dans ce cas :

$$\varphi_0 = \pi/4$$

$$\Delta_0 = \lambda/8$$

$$\mathrm{d}z_0 = \Delta_0/(1 - \cos U_0) = \lambda/4.4 \sin^2(U_0/2)$$

$$\mathrm{d}z'_0 = \lambda/4\, U'^2_0$$

$$X'_0 = \lambda/8\, U'^2_0 .$$

La variation maximale du signal photoélectrique ΔS (fig. 14) en fonction d'une variation de phase $\delta\varphi$ est telle que :

$$\Delta S = \delta S\left(\frac{T}{4}\right) - \delta S\left(\frac{3\,T}{4}\right) = 2\,I_0\,\delta\varphi = 4\,S_0\,\delta\varphi\,.$$

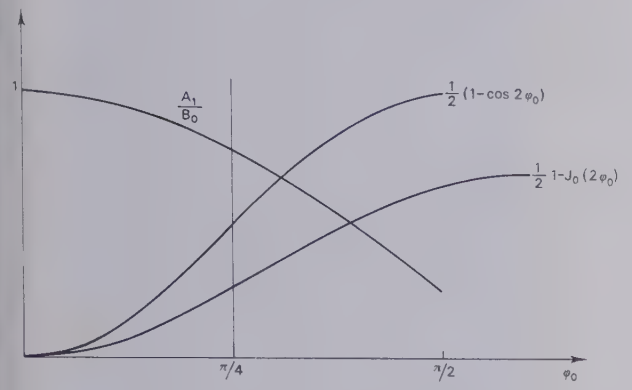

FIG. 14. *Variations du rapport de la première harmonique du signal d'erreur au bruit du signal au niveau du signal moyen, du signal moyen, de la profondeur de modulation du signal, en fonction de la modulation de la phase au bord de la zone commune du dédoublement.*

D'où la limite de résolution de la méthode sur la détection de la phase :

$$\delta\varphi = \frac{1}{4}\,\frac{\Delta S}{S_0} = \frac{\sigma}{4}$$

σ étant la sensibilité relative de la chaîne de mesure.

La limite de résolution de la méthode sur la détection de l'écart aberrant est :

$$\delta\Delta = \frac{\lambda}{8\,\pi}\,\sigma\,.$$

Or une variation de défaut de mise au point δdz, entraînant une variation de l'écart aberrant $\delta\Delta$, correspond à une variation du déplacement relatif de l'objet par rapport à l'instrument $\delta s = \delta dz/2$, puisque la localisation se fait par réflexion sur une surface. Donc la limite de résolution de la méthode sur la détection du déplacement s de l'objet est :

$$\delta s = \frac{\lambda}{8\,\pi}\,\frac{1}{4\sin^2(U_0/2)}\,\sigma\,.$$

Si nous nous plaçons dans le cas de l'hypothèse expérimentale véritable, le récepteur photoélectrique reçoit tout le flux lumineux traversant la zone commune du dédoublement, et non pas la partie du flux isolée par une petite plage au bord de cette zone.

Dans ce cas la variation du flux lumineux en fonction de la phase est :

$$F(\varphi) = I_0 \iint \sin^2\varphi(u)\,du\,dv\,.$$

Les variations du flux en fonction de la variation de la phase au bord de la zone commune, soit $\partial F/\partial\varphi = F'(\varphi)$ présentent un maximum maximorum $F'_M(x)$ ne variant pratiquement pas avec x (fig. 15).

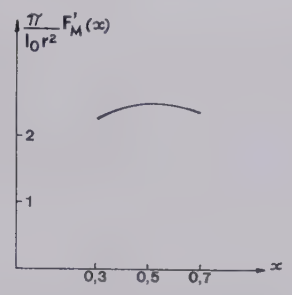

FIG. 15. — *Maximum de variation relative du flux lumineux en fonction du dédoublement relatif du duplicateur d'ondes.*

Les valeurs φ_0 de φ pour lesquelles on obtient ces maxima (fig. 16) font que le flux transmis par la zone commune est maximal pour $x = \frac{1}{2}$.

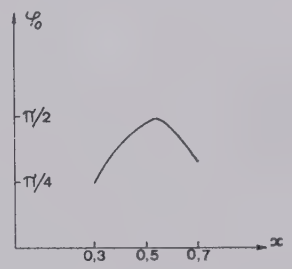

FIG. 16. — *Variation de l'amplitude de modulation optimale de la phase en fonction du dédoublement relatif du duplicateur d'ondes.*

Pour cette valeur, correspondant donc à un dédoublement optimal égal à l'angle d'ouverture image de l'objectif, l'amplitude de modulation optimale φ_0 de la phase est environ $\pi/2$, ce qui correspond à une amplitude de modulation du chemin optique aberrant Δ_0 de l'ordre de $\lambda/4$.

Nous avons défini précédemment la sensibilité relative σ de la chaîne de mesure comme le rapport du minimum décelable de la variation du signal photoélectrique ΔS à la profondeur de modulation S_0 du signal.

Or

$$\Delta S \simeq 2\,F'(\varphi_0)\,\delta\varphi$$
$$S_0 \simeq F(\varphi_0)\,.$$

D'où la limite de résolution de la méthode :

$$\delta\varphi = \frac{F(\varphi_0)}{2\,F'(\varphi_0)}\,\sigma\,.$$

Or pour $x = \frac{1}{2}$ et $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{2}$:

$$F'\left(\frac{\pi}{2}\right) \# \frac{4}{\pi}\,F\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

On peut s'attendre à ce que, faisant une moyenne sur le signal optique à l'intérieur de la zone commune, l'on obtienne le résultat que l'on aurait obtenu dans l'hypothèse simplificatrice en isolant une petite plage au centre de gravité de la demi-zone commune, ce qui

nous conduirait à une sensibilité environ deux fois moindre pour une amplitude de modulation un peu plus de deux fois plus grande.

Le calcul du flux lumineux traversant la zone commune pour une valeur de dédoublement relative $x = \varepsilon/2\,U_0'$ quelconque conduit à :

$$F(\varphi) = I_0\, r^2\, \theta \left\{ 1 - \frac{\sin 2\,\theta}{2\,\theta} - \right.$$

$$- 4 \cos 4\,A \left[\frac{J_0(4\,R) + J_0''(4\,R)}{2} \right.$$

$$\left. + \sum_p (-1)^p \left[J_{2p}(4\,R) + J_{2p}''(4\,R) \right] \frac{\sin 2\,p\theta}{2\,p\theta} \right]$$

$$+ 4 \sin 4\,A \sum_p (-1)^p \left[J_{2p-1}(4\,R) + J_{2p-1}''(4\,R) \right] \times$$

$$\left. \times \frac{\sin (2\,p-1)\,\theta}{(2\,p-1)\,\theta} \right\}.$$

avec $\theta = \arccos x$, $A = 2\,\varphi x^2$, $R = 2\,\varphi x$.

r étant le rayon de la pupille de sortie de l'objectif.

Le signal photoélectrique $S(t)$ s'obtient en portant

$$\varphi = \varphi_0 \sin \frac{2\,\pi t}{T}$$

dans l'expression de $F(\varphi)$.

d'où

$$\delta\varphi \# \frac{\pi}{8}\sigma \# \frac{\sigma}{2{,}5}$$

$$\delta\Delta = \frac{\lambda}{16}\sigma$$

$$\delta s = \frac{\lambda}{16} \frac{1}{4 \sin^2 (U_0/2)}\sigma\,.$$

Ces résultats sur la sensibilité et l'amplitude de modulation optimale sont conformes à ce que l'on pouvait déduire de l'étude du cas de l'hypothèse simplificatrice.

Cette amplitude de modulation optimale $\Delta_0/\lambda = 1/4$, conduit à une amplitude de vibration du miroir $X_0' = \lambda/4\,U_0'^2$, soit 0,2 mm pour un objectif 10 x, 0,25 et 0,8 mm pour les objectifs plus forts. Cette dernière valeur ne peut être atteinte dans le cas de l'instrument décrit au précédent paragraphe, car la lame de céramique piézoélectrique utilisée ne fournit une modulation sinusoïdale que pour des amplitudes de vibration ne dépassant pas 0,5 mm. Les qualités de notre modulateur ne nous permettent donc pas une amplitude de modulation Δ_0 supérieure à $\lambda/8$ dans le cas des objectifs forts.

Les photographies de la figure 17 sont relatives à une expérience réalisée avec l'appareil décrit au chapitre II. Une tension de 250 volts crête à crête

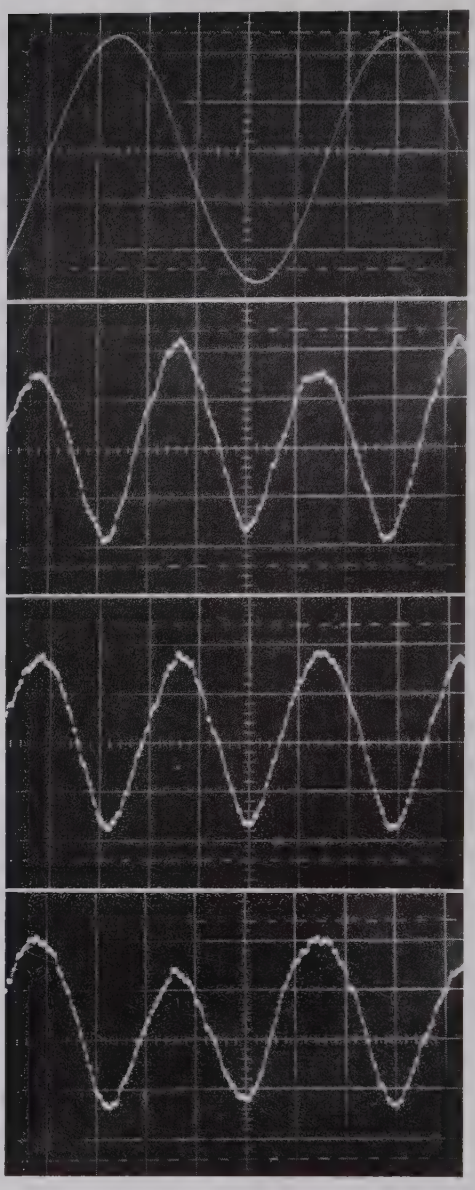

FIG. 17. — *Oscillagrammes du signal fourni au modulateur* (*a* : 50 V/cm, 0,2 ms/cm) *du signal photoélectrique pour une bonne mise au point* (*c* : 50 mV/cm) *et pour des défauts de mise au point de* **1** µ *de part et d'autre de la mise au point* (*b et d*).

(fig. 17*a*-50 volts par cm) est fournie au modulateur à la fréquence de résonance de 950 Hz (0,2 ms par cm). L'amplitude de vibration de la lame est alors de l'ordre de 0,6 mm. L'objectif utilisé est un objectif 6 x, 0,20 diaphragmé à l'ouverture numérique 0,10 environ. L'amplitude de modulation Δ_0 de l'écart aberrant est donc de l'ordre de $\lambda/3{,}5$. Le dédoublement relatif x de l'interféromètre est de l'ordre de 0,7. La figure 17*c* montre l'allure du signal (50 mV par cm) fourni par un photomultiplicateur 1 P 21 de RCA pour la bonne mise au point, les signaux des figures 17*b* et 17*d* sont obtenus après déplacements de la surface localisée de 1 µ de part et d'autre de la mise au point.

CONCLUSIONS

Lorsqu'un objectif de microscope d'ouverture numérique sin U_0 est affecté d'un défaut de mise au point dz par rapport à son plan de mise au point parfaite, le chemin optique aberrant au bord de la pupille varie de $\Delta = dz(1 - \cos U_0)$. Il est possible d'observer, et donc de mesurer, une valeur 2Δ en associant à l'objectif un interféromètre à polarisation dont le dédoublement est égal au rayon de la pupille. Les avantages de ce système : proportionnalité entre dz et Δ, emploi d'un éclairage partiellement cohérent en lumière blanche, utilisation d'un champ objet de dimensions finies, permettent d'en envisager l'application à la localisation des surfaces, à la mesure des défauts de mise au point, à l'asservissement de la mise au point d'un système optique sur un plan objet.

Ces opérations sont possibles par un procédé photoélectrique en modulant, dans le temps, le défaut de mise au point, c'est-à-dire la phase dans le plan de la pupille. Un récepteur photoélectrique sensible au flux lumineux variable dans le plan de la pupille fournit un signal photoélectrique dépourvu d'harmoniques impaires lorsque l'objectif travaille à sa bonne distance de correction (identité des interférogrammes pour des défauts de mise au point symétriques). Le signal d'erreur produit lorsque s'ajoute un défaut de mise au point fixe ne comportant que des harmoniques impaires est traité par un amplificateur à détection synchrone. La mesure électrique du défaut de mise au point peut se faire par mesure de l'amplitude de ce signal d'erreur ; la mesure optique à l'aide d'un compensateur, dont le déplacement peut être commandé par le signal d'erreur, ou la simple localisation de la surface se fait par annulation de cette amplitude.

La résolution $\delta\varphi$ sur la phase (ou $\delta\Delta$ sur le déplacement) est remarquable si l'on dispose d'un modulateur sinusoïdal de porteuse très stable, si l'amplitude de modulation est choisie de façon à ce que la profondeur de modulation du signal photoélectrique ne soit pas trop petite, enfin si l'on dispose d'un amplificateur linéaire synchrone de bonne qualité.

Ainsi, pour fixer les idées, si l'on dispose d'une chaîne de mesure dont la sensibilité relative, définie comme le rapport de la plus petite variation du signal décelable à la profondeur de modulation du signal, est égale à 10^{-3}, la limite de résolution sur la détection de la phase est de l'ordre de la minute d'arc, sur la variation du chemin optique aberrant de $\lambda/16\,000$, sur le déplacement du miroir objet d'une quantité variant de quelques Å à une fraction d'Å suivant la puissance de l'objectif.

(Manuscrit reçu le 23 octobre 1970).

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARNULF (A.). — *J. Phys.* [6], t. **10**, 1929, p. 625.
[2] DOSSIER (B.), JACQUINOT (P.), MARECHAL (A.) et PIEUCHARD (G.). — *J. Phys.* [8], t. **12**, 1951, p. 143 et 565.
[3] SIMON (J.). — *Rev. Opt.*, t. **40**, 1961, p. 213.
[4] STEEL (W. H.). — *J. O. S. A.*, t. **52**, 1962, p. 1153.
[5] SIMON (J.). — *Rev. Opt.*, t. **46**, 1967, p. 197.
[6] SIMON (J.). — *C. R. Acad. Sc.*, t. **267 B**, 1968, p. 1141.
[7] DUPUY (O.). — *Rev. Opt.*, t. **43**, 1964, p. 217 et 282.
[8] NOMARSKI (G). — Catalogue de 55e Exposition de la Sté Fr. Phys., 1958, p. 5.
[9] NOMARSKI (G.), ROBLIN (G.) et ANVAR. — **BF** 69 42 108 du 5 déc. 1969.
[10] ROBLIN (G.). — *Optica Acta*, **17**, 1970, p. 189.
[11] NOMARSKI (G.), ROBLIN (G.) et GÉLÉOC (P.). — *C. R. Acad. Sc.*, t. **269 B**, 1969, p. 290.

Nous adressons nos remerciements à Monsieur P. Géléoc pour l'aide efficace apportée dans le montage et les essais de l'instrument, à Monsieur G. Tissot pour l'exécution des dessins de mécanique.

Imprimé en France - Editions MASSON et Cie
Imprimerie JOUVE, 12, rue de Tournon, Paris 6e